现代数学研究丛书

主编 刘应明

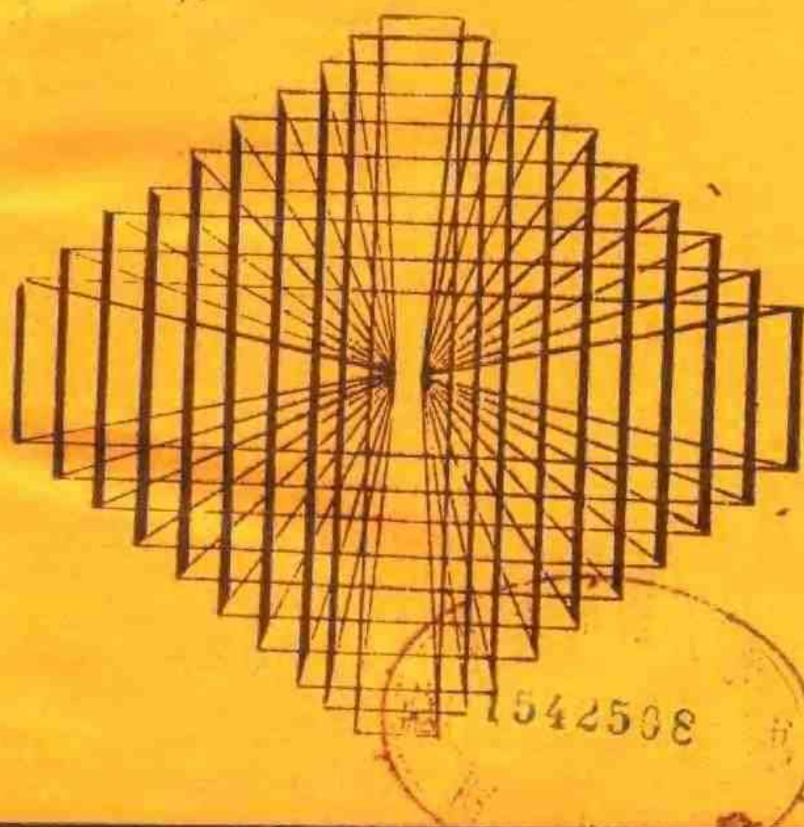
仿射微分几何

李安民 赵国松



现代数学研究丛书

仿射微分几何



四川教育出版社

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵
版面设计：顾求实

现代数学研究丛书
仿射微分几何　　李安民 赵国松 著

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川科技出版社照排
四川省新华书店经销　成都金牛印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32　印张7.375插页4 字数176千
1990年1月第一版　1990年1月第一次印刷
印数：1—720册

ISBN7—5408—1150—1/G·1121(精)定价：4.80元

主编 刘应明

副主编 杨 路 刘旺金 胡师度

李安民 赵国松著

国家自然科学基金资助项目

国家教委博士点基金

序

李安民同志撰《仿射微分几何》，约我写几句话，很高兴有此机会。

仿射微分几何的创始人，当推德国数学家 Wilhelm Blaschke (1885—1962 年)(他是我的老师)。他的名著“微分几何”第二本，汇集了他和他的合作者关于仿射微分几何的研究成果，是一经世之作。50 年来，关于仿射微分几何的研究，还未能脱他的范围。他限于单模仿射群，眼光深远。

仿射超曲面的研究自然地引到 Monge-Ampère 方程。这个重要的非线性方程因此得到几何的意义，对于它的研究便有很大的帮助。首先对此有深刻的认识的是 E. Calabi(1958 年)。仿射球的研究是微分几何美妙的一章，对此作重要贡献的有 A. V. Pogorelov、丘成桐、郑绍远等。

仿射微分几何的问题还多，极大曲面是其中的一个。年来黎曼空间的极小流形和调和映射有蓬勃的发展。仿射情形因为基本方程是四级的，产生了严重的困难，但也给数学家一个挑战，它的进展需要创见和努力。

安民此书综合了仿射微分几何近年来的发展，是一项重要的贡献。

陈省身

1988 年 9 月于天津

前　言

仿射微分几何是微分几何的一个重要分支，它是由 W. Blaschke 和他的合作者们，按照克莱茵的几何分类思想，于本世纪 20 年代创立的。它主要研究仿射空间中非退化的超曲面在幺模仿射变换下的不变性质。我国著名数学家苏步青教授在 20 年代后期对仿射微分几何作出了重要贡献，他的主要成就总结在他最近的专著《仿射微分几何》(科学出版社，1982 年)一书中。

最近 30 年来，仿射微分几何取得了辉煌的成就，这主要表现在完成了对完备仿射球的分类，这个问题在欧氏空间的曲面论中是平凡的，而在仿射微分几何中则是非常深入、复杂的。E. Calabi、丘成桐、郑绍远、A. V. Pogorelov、T. Sasaki 等人在这方面作出了杰出的贡献。

本书的目的是向读者介绍仿射微分几何的基本理论以及最近 30 年来的重要进展，我们限于研究局部严格凸超曲面。在第一章中，我们用活动标架法建立了局部仿射微分几何的基本理论，这套表述方法本质上是陈省身教授首先引入仿射微分几何的。第二章介绍完备仿射球的分类。第三章研究由 Blaschke 度量、高阶仿射平均曲率、Blaschke 度量的黎曼曲率张量所决定的刚性和唯一性问题。第四章

研究仿射极大曲面，主要围绕着仿射伯恩斯坦问题展开讨论。第五章研究仿射等周不等式。

本书材料主要来源于陈省身、E. Calabi、丘成桐、郑绍远、T. Sasaki、U. Simon、R. Schneider、熊全治等人以及我本人的文章。我的一部分研究工作是我1986—1987年在西柏林技术大学(Technische Universität Berlin)访问期间，在洪堡基金(Alexander Von Humboldt-Stiftung)的资助下完成的，我想借此机会向洪堡基金会、西柏林技术大学数学系以及U. Simon教授表示衷心的感谢！

我在从事仿射微分几何研究以及撰写本书过程中，经常得到国际著名数学大师陈省身教授的热情帮助、鼓励和支持，他在百忙中还为本书写序。我想借此机会向陈省身教授表示衷心的感谢！我还非常感激我的导师吴光磊教授多年来的指导和培养。

本书是我和赵国松根据我1988年春季为四川大学数学系微分几何研究生讲授仿射微分几何的讲稿，作了较大的修改补充而成的。研究生们对讲稿提出了不少宝贵意见，余建辉同学还仔细阅读了大部份章节。本书得以问世，是由于四川教育出版社的大力支持，在此向他们一并表示感谢！

为了把众多的文献组织成一本书，作者对文献中的结果进行了改写，加了不少作者自己的看法和新的处理。由于作者水平有限，加之时间仓促，难免存在不妥和错误之处，恳切地希望读者批评指正。

李安民

1988年8月于成都

目　　录

第一章 局部仿射微分几何的基本理论

§1 等积仿射变换群

1872 年克莱茵(F. Klein)在著名的爱尔兰根纲领(Erlangen Program)中把几何学归为研究在某种可递变换群下的不变量的学科。按照这种观点，普通欧氏空间的微分几何是研究曲线或曲面在运动群下的微分或积分不变量的学科。本书讨论的“仿射微分几何”则研究曲线或曲面在“等积仿射变换群”下的微分或积分不变量，因此也称为“等积仿射微分几何”(equiaffine differential geometry)。

我们用 A^n 表示 n 维实仿射空间。A^n 中没有内积的概念，因而长度、角度都是没有意义的。但是可以谈论“平行性”。A^n 中还有“有向体积”的概念。以 V 表示 A^n 中全体向量的集合[①]，它是一个 n 维实线性空间，因而可以赋予外代数结构。用 $\Lambda^k(V)$表示 V 的 k 次外矢量空间，它是形如 $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_k$ 的元素生成的线性空间，其中“$\wedge$”表示外积符号，$v_1,v_2,\cdots,v_k$ 是 V 中的向量。令

$$\Lambda(V)=\bigoplus_{p=0}^{n}\Lambda^p(V),$$

① 我们有时把向量也称为矢量。

它是实数域上的外代数。通常把$\wedge^0(V)$与实数域R等同。周知$\wedge^n(V)$是一维线性空间，任意取定其中一个非零元素η为基，则A^n中任意n个有序向量$v_1,v_2,\cdots,v_n$的外积是它的一个实数倍，即

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = a\eta, \quad a \in R$$

而且a是唯一确定的。我们把a定义成这个有序向量组所确定的平行多面体的有向体积。如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$满足$\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_n=\eta$，则$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$确定的有向体积为1。按不同的排列方式，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$能构成的外积有$n!$个，但这$n!$个中只有两个不同，偶排列对应$\eta$，奇排列对应$-\eta$。后者对应的有向体积为$-1$。这就是说，在指定$\eta$为$\wedge^n(V)$的基时，同时也就指定了$A^n$的一个定向和一个体积单位。若$\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_n=\eta$，把$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$取为$V$的有序基底，则$v_1,v_2,\cdots,v_n$确定的有向体积正好是以它们关于这个基底的分量为元素（按它们的排列顺序）构成的n阶行列式。以后我们把$v_1,v_2,\cdots,v_n$确定的有向体积a记为

$$a = [v_1,v_2,\cdots,v_n].$$

注意，$a=0$表示$v_1,v_2,\cdots,v_n$线性相关。

在以下讨论中，我们约定求和指标的取值范围为

$$1 \leqslant A,B,C,\cdots \leqslant n.$$

在A^n中任取一点P作为原点，再任取n个线性无关的向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$，它们一起构成A^n的一个仿射标架，记为$\{P;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，或者$\{P;e_A\}$。A^n中的点x关于这个仿射标架的坐标记为$x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，位置矢量仍记为x，则

$$x = \sum_{A=1}^{n} x^A e_A.$$

如果仿射标架$\{P;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$还满足

$$[e_1,e_2,\cdots,e_n] = 1,$$

则称它为幺模仿射标架(*unimodular affine frame*)。

A^n 中的仿射变换是形如下式的非退化的线性变换

$$\bar{x}^A = \sum_{B=1}^{n} a_B^A x^B + c^A,\ A = 1,2,\cdots,n.$$

如果变换矩阵(a_B^A)满足

$$\det(a_B^A) = 1,$$

则称这个变换为等积仿射变换或者幺模仿射变换。显然有向体积在等积仿射变换下不变。全体等积仿射变换的集合按变换的乘法构成一个群，称为等积仿射变换群或幺模仿射变换群。它是一个$n(n+1)-1$维李群。它与 A^n 中全体幺模仿射标架的集合成一一对应。这容易从 A^n 中任意两个幺模仿射标架恰存在一个幺模仿射变换把一个变成另一个的事实知道，因此我们可以把等积仿射变换群与 A^n 中全体幺模仿射标架的集合等同起来。这样，A^n 中的幺模仿射标架依赖于 $n(n+1)-1$ 个参数，可以用参数 $u^1, u^2, \cdots, u^{n(n+1)-1}$ 把幺模仿射标架写成$\{P(u^1,u^2,\cdots,u^{n(n+1)-1}); e_A(u^1,u^2,\cdots,u^{n(n+1)-1})\}$.

下面讨论 A^n 的结构方程，我们采用活动标架法叙述。不熟习外微分和活动标架法的读者，可以参看陈省身和陈维桓的书[Cher-C]。

考虑 A^n 中的幺模仿射标架$\{P; e_A\}$，让它作一无穷小移动，得到$\{P+dP; e_A+de_A\}$。无穷小矢量 dP 和 de_A 可以在标架$\{P; e_A\}$下表示出来。设

$$dP = \sum_{A=1}^{n} \omega^A e_A, \tag{1}$$

$$de_A = \sum_{B=1}^{n} \omega_A^B e_B, \quad A = 1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

其中 ω^A、ω_A^B 是 $du^1, du^2, \cdots, du^{n(n+1)-1}$ 的线性组合，称为等积仿射变换群的 Maurer—Cartan 形式，它们由下式确定：

$$\omega^A = [e_1, \cdots, e_{A-1}, dP, e_{A+1}, \cdots, e_n], \tag{3}$$

$$\omega_A^B = [e_1, \cdots, e_{B-1}, de_A, e_{B+1}, \cdots, e_n]。 \tag{4}$$

(1)和(2)通常称为标架的**运动方程**。外微分 $[e_1, e_2, \cdots, e_n] = 1$，我们得到

$$\sum_{A=1}^{n} \omega_A^A = 0. \tag{5}$$

对(1)和(2)外微分(我们对向量的外微分是对其分量进行的)，由对函数两次外微分为零的事实，我们有

$$d^2P = 0, \quad d^2e_A = 0,$$

由此导出

$$d\omega^A = \sum_{B=1}^{n} \omega^B \wedge \omega_B^A, \tag{6}$$

$$d\omega_A^B = \sum_{C=1}^{n} \omega_A^C \wedge \omega_C^B, \tag{7}$$

$$A, B = 1,2,\cdots,n.$$

(5)、(6)和(7)称为 A^n 的**结构方程**或**等积仿射变换群的 Maurer-Cartan 方程**。

§2 仿射空间的曲线

2.1 A^n 中的曲线的一般理论

在 A^n 中取一固定的幺模仿射标架 $\{O;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$。为了记号简单清晰，在本节中 A^n 中点 x 关于这个标架的坐标用下标表示，即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。A^n 中的曲线表示为

$$x = x(t), \tag{1}$$

或者

$$x_1 = x_1(t),\quad x_2 = x_2(t),\quad \cdots,\quad x_n = x_n(t),\quad a<t<b, \tag{2}$$

式中函数都是 $n+1$ 阶连续可微的。我们规定按参数 t 增加的方向为曲线的正向。类似于欧氏空间的曲线可以取弧长参数，A^n 中的曲线也可以取一种特殊的参数，称为**仿射弧长参数**，现在导出它。我们用点或者加括号的数字表示关于参数 t 的各阶导数，如 $\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(k)}$ 等等。假定沿曲线 $x(t)$

$$[\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(n)}]\neq 0, \tag{3}$$

考虑以下的一次微分式

$$|[\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}}dt, \tag{4}$$

显然它与幺模仿射标架的选取无关。下面我们还要进一步证明它与参数的选取也无关。引入新参数 $s=s(t)$，其中 $\dot{s}(t)>0$。我们用撇号表示关于 s 的导数，有时为了区别起见，用 $x_t^{(k)}$ 和 $x_s^{(k)}$ 分别表示关于 t 和 s 的 k 阶导数。我们有

$$\dot{x} = x' \frac{ds}{dt},$$

$$\ddot{x} = x''(\frac{ds}{dt})^2 + x' \frac{d^2 s}{dt^2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_t^{(n)} = x_s^{(n)}(\frac{ds}{dt})^n + (\text{包含 } x', x'', \cdots, x_s^{(n-1)} \text{ 的部份}).$$

容易算得

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x_t^{(n)}] = [x', x'', \cdots, x_s^{(n)}](\frac{ds}{dt})^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

或者

$$|[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x_t^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt = |[x', x'', \cdots, x_s^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} ds。$$

因此，(4)定义的微分式与参数的选取无关。

曲线 $x(t)$ 从 a 点算起的仿射弧长定义为

$$s = s(a, t) = \int_a^t |[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt, \tag{5}$$

由此得

$$ds = |[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}]|^{\frac{2}{n(n+1)}} dt. \tag{6}$$

显然仿射弧长满足欧氏弧长类似的加法定理：

当 $t_1 < t_2 < t_3$ 时，有

$$s(t_1, t_2) + s(t_2, t_3) = s(t_1, t_3). \tag{7}$$

为了避免在公式中出现绝对值，我们假定

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}] > 0.$$

当 $n=3$ 时，这个条件表示曲线是正向挠转的。由于 $\frac{ds}{dt} > 0$，我们可以选择仿射弧长 s 作为新的参数，它除了 $s=0$ 的选取外是唯一确定的。以后用撇号表示关于仿射弧长 s 的导数。以弧长 s 作为新的

参数时，从(6)便有

$$[\dot{x},\ddot{x},\cdots,x^{(n)}]=1. \tag{8}$$

沿着曲线 $x(t)$ 取如下的标架场

$$e_1=x',e_2=x'',\cdots,e_n=x^{(n)},$$

由(8)知 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是沿 $x(t)$ 的幺模仿射标架场。关于这场标架我们有

$$e_1'=e_2,$$

$$e_2'=e_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_{n-1}'=e_n.$$

关于 s 导微(8)，我们得到

$$[x',x'',\cdots,x^{(n-1)},x^{(n+1)}]=0$$

即

$$[e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},e'_n]=0.$$

由于 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 线性无关，因此 e'_n 可以由 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 线性表出。令

$$e'_n=-k_1e_1-k_2e_2-\cdots-k_{n-1}e_{n-1}, \tag{9}$$

即有

$$k_i=-[x',\cdots,x^{(i-1)},x^{(n+1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)}], \tag{10}$$

$$i=1,2,\cdots,n-1.$$

我们把 $k_1、k_2、\cdots、k_{n-1}$ 称为曲线 $x(t)$ 的**仿射曲率**。上面所取的沿曲线的幺模仿射标架场的微商可以写成

$$x'=e_1,$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{n-1} \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}. \quad (11)$$

曲线给定了以后，它的仿射曲率就唯一地确定了。反之，给定了 $n-1$ 个连续可微的函数 $k_1(s), k_2(s), \cdots, k_{n-1}(s)$，利用常微分方程组的解的存在性和唯一性定理不难证明，存在一条曲线 $x(s)$，它以所给的函数 $k_1(s), k_2(s), \cdots, k_{n-1}(s)$ 为仿射曲率，而且除了相差一个等积仿射变换外，这种曲线是唯一的。

注记 我们上面定义的仿射曲率，并不是曲线所决定的最低阶数微分不变量。$n=3$ 的情形请读者参看[Blas—2]或[Su]，但是这里定义的仿射曲率简单，容易计算。我们宁愿采取这种定义。

作为特例，我们考虑 A^2 中的曲线。这时，公式(11)化为

$$\begin{cases} x' = e_1, \\ e'_1 = e_2 \\ e'_2 = -ke_1. \end{cases} \quad (12)$$

公式(9)和(10)化为

$$x''' + kx' = 0, \quad (13)$$

$$k = -[x''', x''].$$

我们考虑 $k=$常数的曲线。分三种情况：

1) $k=0$。 方程(13)的一般解为

$$x = \frac{1}{2}\alpha s^2 + \beta s + \gamma,$$

其中 α、β、γ 为 A^2 中的任意常向量，满足 $[\alpha, \beta] = 1$。这表明仿射曲率恒为零的曲线是抛物线。

2） $k =$ 正常数。 这时曲线可表成

$$x_1 = a\cos\sqrt{k}\,s, \quad x_2 = b\sin\sqrt{k}\,s,$$

式中 a、b 为常数，条件 $[x', x''] = 1$ 表明

$$ab(k)^{\frac{3}{2}} = 1.$$

因此我们得到椭圆

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

$$k = \left(\frac{\pi}{F}\right)^{\frac{2}{3}},$$

式中 $F = \pi ab$ 是椭圆的面积。

3） $k =$ 负常数。 曲线的方程可以写成

$$x_1 = a\,\mathrm{ch}\sqrt{-k}\,s, \quad x_2 = b\,\mathrm{sh}\sqrt{-k}\,s,$$

或者

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

$$k = -(ab)^{\frac{2}{3}}.$$

这是双曲线方程。

2.2　A^2 中曲线在一点的典型展开

对于 A^2 中的曲线 $x(s)$，我们称 x'' 为曲线的仿射法矢，称 x'' 所在的直线为曲线的仿射法线。下面我们导出在一点附近的典型展开式，并用以说明仿射法线的几何意义。

当曲线由一般参数给定时，我们有

$$ds = [\dot{x}, \ddot{x}]^{\frac{1}{3}} dt$$

令

$$[\dot{x}, \ddot{x}]^{\frac{1}{3}} = \varphi,$$

则有

$$x' = \frac{\dot{x}}{\varphi},$$

$$x'' = \frac{\ddot{x}}{\varphi^2} - \dot{x}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^3},$$

$$x''' = \frac{\dddot{x}}{\varphi^3} - 3\ddot{x}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^4} - \dot{x}\left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^3}\right)^{\cdot}.$$

由于$[\dot{x}, \ddot{x}] = \varphi^3$，因此

$$[\dot{x}, \dddot{x}] = 3\varphi^2\dot{\varphi}.$$

从而仿射曲率为

$$k = [x'', x'''] = \frac{[\ddot{x}, \dddot{x}]}{\varphi^5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^{\cdot\cdot} \tag{14}$$

如果我们取 $x_1 = t$ 为参数，则

$$x' = (\ddot{x}_2^{-\frac{1}{3}}, \dot{x}_2\ddot{x}_2^{-\frac{1}{3}}), \tag{15}$$

$$x'' = (-\frac{1}{3}\ddot{x}_2^{-\frac{5}{3}}\dddot{x}_2, \ddot{x}_2^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\dot{x}_2\ddot{x}_2^{-\frac{5}{3}}\dddot{x}_2), \tag{16}$$

$$k = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_1^2}\ddot{x}_2^{-\frac{2}{3}} = -\frac{5}{9}\ddot{x}_2^{-\frac{8}{3}}\dddot{x}_2^2 + \frac{1}{3}\ddot{x}_2^{-\frac{5}{3}}x_2^{(4)}. \tag{17}$$

通过一个等积仿射变换，我们把坐标原点移到曲线上的点 x_0 处，并使 x'_0和 x''_0分别具有坐标(1,0)和(0,1)。根据(15)和(16)，在点 x_0 我们有

$$\dot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 = 1, \quad \dddot{x}_2 = 0。 \tag{18}$$

由此，我们得到曲线在点 x_0 附近的典型展开

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3k_0}{4!}x_1^4 + \frac{3k'_0}{5!}x_1^5 + \cdots, \tag{19}$$

式中 k_0,k'_0分别表示 k、k' 在点 x_0 的值。

由于$[x',x'']=1>0$,曲线是凸曲线,因此过点 x_0 附近的点 x 引平行于 x'_0的直线,它与曲线必交成两点,为了确定交点的坐标,我们把 x_1 展成$\sqrt{x_2}$的幂级数。设

$$x_1 = \alpha\sqrt{x_2} + \beta(\sqrt{x_2})^2 + \gamma(\sqrt{x_2})^3 + \delta(\sqrt{x_2})^4 + \cdots,$$

把它代入(19),并比较系数,得到

$$\alpha^2 = 2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{3k_0}{4!}\alpha^3, \quad \delta = -\frac{3k'_0}{5!}\alpha^4,$$

因此,两个交点 y、z 的坐标分别为

$$\begin{cases} y_1 = -\sqrt{2}\sqrt{x_2} + \dfrac{6\sqrt{2}}{4!}k_0(\sqrt{x_2})^3 - \dfrac{12}{5!}k'_0(\sqrt{x_2})^4 + \cdots, \\ y_2 = x_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\sqrt{x_2} - \dfrac{6\sqrt{2}}{4!}k_0(\sqrt{x_2})^3 - \dfrac{12}{5!}k'_0(\sqrt{x_2})^4 + \cdots, \\ z_2 = x_2. \end{cases}$$

平行弦$\overline{yz}$的中点的坐标为

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{y_1 + z_1}{2} = -\dfrac{k'_0}{10}x_2^2 + \cdots, \\ m_2 = \dfrac{y_2 + z_2}{2} = x_2, \end{cases}$$

因此,在原点有

$$\frac{dm_1}{dm_2} = 0.$$

此式表明在点 x_0 附近所引曲线在 x'_0方向的平行弦,其中点的轨迹在点 x_0 的切线正是曲线在点 x_0 的仿射法线。

关于 A^2 和 A^3 中的仿射曲线,有许多有趣的整体结果,限于篇幅,这里不作介绍,读者可参看[Blas—2]或[Su].

§3 超曲面的 Blaschke 度量

我们现在开始讨论 $n+1$ 维实仿射空间 A^{n+1} 中的超曲面。设 M 是 n 维光滑流形，$x: M\to A^{n+1}$ 为光滑浸入(*immersion*)。由于本章的讨论是局部的，为了符号简单，以后我们常常把 $x(M)$ 与 M 等同起来。沿 M 选取局部幺模仿射标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $x\in M$，$e_1, e_2, \cdots, e_n\in T_xM$，其中 T_xM 是 $x(M)$ 在点 x 的切空间，则 e_{n+1} 一定不落在 T_xM 中。由 §1 中的(1)式和(2)式，标架场的运动方程为

$$dx = \sum_{A=1}^{n+1}\omega^A e_A, \tag{1}$$

$$de_A = \sum_{B=1}^{n+1}\omega_A^B e_B,\ A = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{2}$$

我们约定，大写英文字母求和指标的取值范围为

$$1\leqslant A, B, C, \cdots \leqslant n+1; \tag{3}$$

小写英文字母求和指标的取值范围为

$$1\leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n. \tag{4}$$

我们把 $\sum\limits_{A=1}^{n+1}$、$\sum\limits_{i=1}^{n}$ 简写成 $\sum$，即省写和号上的指标，当两个相同指标出现于和式中时，表示在它们的取值范围内求和，以后在不作别的声明时，我们沿用这个约定。

(1)式中的 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^{n+1}$ 也称为标架场 $e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}$ 的对偶标架场，或者余标架场。当限制在 M 上时，有

$$\omega^{n+1} = 0. \tag{5}$$

外微分(5)，并使用 §1 中的(6)，我们得到

$$\sum\omega^i\wedge\omega_i^{n+1} = 0. \tag{6}$$

由 Cartan 引理(参看[Cher—C])有

$$\omega_i^{n+1} = \sum h_{ij}\omega^j, \tag{7}$$

$$h_{ij} = h_{ji}.$$

下面我们考虑二次微分形式

$$\sum \omega^i\omega_i^{n+1} = \sum h_{ij}\omega^i\omega^j, \tag{8}$$

从§1中的(4)式知

$$\omega_i^{n+1} = [e_1, e_2, \cdots, e_n, de_i], \tag{9}$$

这表明二次微分形式(8)关于 A^{n+1} 中的等积仿射变换是不变的。但是它还依赖于 $x(M)$ 上的局部幺模仿射标架场的选取。为了得到与局部幺模仿射标架场的选取无关的微分式，我们研究在标架变换下，(8)是如何变化的。设 $\{x; e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*, e_{n+1}^*\}$ 是另外一个局部幺模仿射标架场，它也满足条件：$e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^* \in T_xM$。设两个标架场的向量间的关系为

$$\begin{cases} e_i^* = \sum a_i^k e_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ e_{n+1}^* = \sum a_{n+1}^i e_i + a^{-1} e_{n+1}, \end{cases} \tag{10}$$

其中　$a=\det(a_i^j)$，或者

$$\begin{cases} e_i = \sum b_i^j e_j^*, \\ e_{n+1} = \sum b_{n+1}^i e_i^* + a e_{n+1}^*, \end{cases}$$

其中 (b_i^j) 为 (a_i^j) 的逆矩阵。对于新标架场我们也有

$$dx = \sum \overset{*}{\omega}{}^i e_i^*,$$

$$de_A^* = \sum \overset{*}{\omega}{}_A^B e_B^*,$$

$$\overset{*}{\omega}{}^{n+1} = 0,$$

$$\overset{*}{\omega}{}_j^{n+1} = \sum h_{ij}^* \overset{*}{\omega}{}^i, \quad h_{ij}^* = h_{ji}^*.$$

从标架场的运动方程和(10)式可得

$$dx = \sum \overset{*}{\omega}{}^i e_i^* = \sum \overset{*}{\omega}{}^i a_i^k e_k = \sum \omega^k e_k,$$

因此

$$\omega^i = \sum a_j^i \overset{*}{\omega}^j。\tag{11}$$

同样可得

$$\omega_i^{n+1} = [e_1,\cdots,e_n,de_i] = a^{-1}\sum b_i^j \overset{*}{\omega}_j^{n+1}。\tag{12}$$

由(11)和(12)得到

$$\overset{*}{h}_{ik} = \sum a a_i^j h_{jl} a_k^l。\tag{13}$$

(13)表明二次微分形式(8)的秩，即矩阵(h_{ij})的秩，是仿射不变的。我们假定(h_{ij})的秩 $\mathrm{rank}(h_{ij})=n$，并称满足这个条件的曲面为非退化的。这时

$$H = \det(h_{ij}) \neq 0.\tag{14}$$

由(13)知

$$\overset{*}{H} = \det(\overset{*}{h}_{ij}) = a^{n+2}H,\tag{15}$$

当 M 是可定向时，我们总选择与定向一致的幺模仿射标架，这样就有 $a>0$，由(15)有

$$|\overset{*}{H}|^{\frac{1}{n+2}} = |H|^{\frac{1}{n+2}}a.\tag{16}$$

(11)、(12)和(16)一起给出

$$|\overset{*}{H}|^{\frac{-1}{n+2}}\sum \overset{*}{\omega}^i\overset{*}{\omega}_i^{n+1} = |H|^{\frac{-1}{n+2}}\sum \omega^i\omega_i^{n+1}.$$

这表明二次微分式

$$|H|^{\frac{-1}{n+2}}\sum \omega^i\omega_i^{n+1} = |H|^{\frac{-1}{n+2}}\sum h_{ij}\omega^i\omega^j\tag{17}$$

与局部幺模仿射标架场的选取无关。它在 M 上定义了一个伪黎曼度量，通常称为 Blaschke 度量，或仿射度量，有时也称为 Berwald-Blaschke 度量。当 M 是局部严格凸的超曲面时，总可以选择 M 的定向，使(h_{ij})为正定矩阵(以后我们总是这样选择)，此时 Blaschke 度量是 M 上的正定黎曼度量。

本书仅讨论局部严格凸的超曲面，为了记号简单，我们把

Blaschke 度量记成

$$G = \sum G_{ij}\omega^i\omega^j, \tag{18}$$

其中

$$G_{ij} = H^{\frac{-1}{n+2}}h_{ij}, \tag{19}$$

4§　仿射法线与　Fubini—Pick 形式

设 $x: M \to A^{n+1}$ 为 A^{n+1} 中的局部严格凸超曲面，它上面的 Blaschke 度量 G 诱导了它上面的 Levi—Civita 连络。象通常黎曼几何一样，我们可以在 M 上定义拉普拉斯算子 Δ。设 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 M 上的任意局部标架场，$\{\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n\}$ 为它的对偶标架场，在这标架场下，Blaschke 度量 G 为

$$G = \sum G_{ij}\omega^i\omega^j.$$

设 f 是 M 上的任意可微函数。f 的微分 df 是 M 上的一次微分式，它可以经过 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$ 表示出来。对应于 ω^i 的分量，记为 f_i，称为 f 关于 e_i 的普通微商，类似地，还可以再对 f_i 进行微商，得到普通的二阶微商 f_{ij}，等等。f 还有关于 G 的 Levi-Civita 连络的各阶协变微商，其关于 ω^i 的分量记为 $f_{,i}$、$f_{,ij}$、$f_{,ijk}\cdots$。设 $(\bar{\omega}_i^j)$ 表示 G 的 Levi—Civta 连络矩阵，f 的协变微商由下式定义：

$$\sum f_{,i}\omega^i = df, \quad f_{,i} = f_i, \tag{1}$$

$$\sum f_{,ij}\omega^j = df_{,i} - \sum \bar{\omega}_i^j f_{,j}, \tag{2}$$

$$\sum f_{,ijk}\omega^k = df_{,ij} - \sum \bar{\omega}_i^k f_{,kj} - \sum \bar{\omega}_j^k f_{,ik}, \tag{3}$$

……

我们有

$$f_{,ij}=f_{,ji},$$

$$f_{,ijk}-f_{,ikj}=\sum f_{,l}R^l_{ijk},\tag{4}$$

……

其中 R^l_{ijk} 为 G 的黎曼曲率张量。上面我们对 M 上的协变张量定义了协变微商，对于 M 上的反变张量或混合型张量可类似地定义。拉普拉斯算子 Δ 在 f 上的作用，定义为

$$\Delta f=\sum G^{ij}f_{,ij},\tag{5}$$

其中(G^{ij})为(G_{ij})之逆。特别，当$\{x;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为关于 G 的单位正交标架场时，$G^{ij}=\delta^{ij}$①，(5)成为

$$\Delta f=\sum f_{,ii}\tag{6}$$

当在 M 上取局部坐标系$(u^1,u^2,\cdots,u^n)$时，把 G 记为

$$G=\sum g_{ij}du^idu^j,$$

Δf 在局部坐标系下有形式

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial}{\partial u^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\,\frac{\partial f}{\partial u^j}\right),\tag{7}$$

其中　$g=\det(g_{ij})$，(g^{ij})为(g_{ij})的逆。

设 $x=(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1})$表示 M 的位置矢量，每个分量 x^i 是 M 上的光滑函数，因而 Δx^i 是有意义的。我们定义 Δx 为

$$\Delta x=(\Delta x^1,\Delta x^2,\cdots,\Delta x^{n+1})\tag{8}$$

下面我们引入一个新的几何量

$$Y=\frac{1}{n}\Delta x.\tag{9}$$

---

① δ^{ij} 以及 δ^i_j、δ_{ij} 均表示 Kronecker 的符号。

后面我们将看到，这个量对于 M 的研究是很重要的。显然 Y 与 M 上的局部标架场的选取无关。其次，Y 是仿射不变地联系于 M 的。因为对任意的幺模仿射变换

$$\bar{x}^A = \sum a^A_B x^B + c^A,$$

我们有

$$\Delta\bar{x}^A = \sum a^A_B \Delta x^B,$$

即是

$$\bar{Y}^A = \frac{1}{n}\sum a^A_B \Delta x^B = \sum a^A_B Y^B,$$

式中 Y^A、$\bar{Y}^A$ 分别为 Y 和 $\bar{Y}$ 的第 A 个分量。我们进一步证明 Y 不落在 M 的切空间 T_xM 中。沿着 M 选取局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1, e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in T_xM$，于是由标架场的运动方程

$$dx = \sum \omega^i e_i$$

即知 x 的普通一阶微商为

$$x_i = e_i.$$

再由

$$de_i = \sum \omega_i^j e_j + \omega_i^{n+1} e_{n+1}$$

可知，x 的普通二阶微商为

$$x_{ij} = \sum \Gamma^k_{ij} e_k + h_{ij} e_{n+1}, \tag{10}$$

式中 Γ^k_{ij} 和 h_{ij} 由下式定义：

$$\omega_i^k = \sum \Gamma^k_{ij}\omega^j, \tag{11}$$

$$\omega_i^{n+1} = \sum h_{ij}\omega^j, \quad h_{ij} = h_{ji}.$$

由(2)，x 关于 G 的 Levi—Civita 连络的二阶协变微商为

$$x_{,ij} = x_{ij} - \sum \tilde{\Gamma}^k_{ij} x_k = x_{ij} - \sum \tilde{\Gamma}^k_{ij} e_k, \tag{12}$$

其中 $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ 由下式定义：

$$\widetilde{\omega}^k_i = \sum \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\omega^j \tag{13}$$

由 $G_{ij}=H^{-\frac{1}{n+2}}h_{ij}$ 和 $G^{ij}=H^{\frac{1}{n+2}}h^{ij}$，从(5)得到

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sum H^{\frac{1}{n+2}}h^{ij}(x_{ij} - \sum \widetilde{\Gamma}^k_{ij}e_k) \\ &= \sum H^{\frac{1}{n+2}}h^{ij}(\sum(\Gamma^k_{ij} - \widetilde{\Gamma}^k_{ij})e_k + h_{ij}e_{n+1}) \\ &= \sum G^{ij}(\Gamma^k_{ij} - \widetilde{\Gamma}^k_{ij})e_k + nH^{\frac{1}{n+2}}e_{n+1}.\end{aligned} \tag{14}$$

从而有

$$\begin{aligned}[e_1,e_2,\cdots,e_n,Y] &= \frac{1}{n}[e_1,e_2,\cdots,e_n,\Delta x] \\ &= H^{\frac{1}{n+2}} > 0.\end{aligned} \tag{15}$$

即 Y 不落在 M 在点 x 的切空间中.

定义 4.1 称 $Y=\frac{1}{n}\Delta x$ 为 M 在点 x 的仿射法向量；称过点 x 并且以 Y 为方向的直线为 M 在点 x 的仿射法线。

从(15)我们看到，仿射法向量 Y 指向切超平面两侧中曲面所在的一侧，即指向曲面凹的一侧。

以后，我们沿 M 选取局部幺模仿射标架场时，不但要求 e_1, $e_2,\cdots,e_n$ 切于 M，而且要求 e_{n+1} 总是沿着仿射法线方向，这样在(14)中

$$\sum G^{ij}(\Gamma^k_{ij} - \widetilde{\Gamma}^k_{ij})e_k = 0, \tag{16}$$

$$Y = H^{\frac{1}{n+2}}e_{n+1}. \tag{17}$$

有了仿射法线以后，A^{n+1} 中的仿射连络以自然的方式在 M 上诱导一个连络：设 X、Z 是 M 上的两个任意切向量场，把 X,Z 看成 A^{n+1} 中的向量作协变微商(在这里即普通微商)$\nabla_X Z$，把 $\nabla_X Z$ 分解成切分量 T 和与仿射法向量平行的分量 W：

$$\nabla_X Z = T + W,$$

容易证明$(X,Z)\to T$确定了M上的一个仿射连络∇'，这个连络在标架场$\{x;e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$下的连络形式就是标架场的运动方程中的相对分量$\omega_i^j$。现在我们在$M$上有了两个连络，一个是$\nabla'$，一个是$G$的Levi—Civita连络，其连络形式为$\tilde{\omega}_i^j$。令

$$\omega_i^j - \tilde{\omega}_i^j = \sum A_{ik}^j \omega^k, \tag{18}$$

或者

$$\Gamma_{ik}^j - \tilde{\Gamma}_{ik}^j = A_{ik}^j, \tag{19}$$

A_{ik}^j是M上的张量场①。由于

$$d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \omega_j^i = \sum \omega^j \wedge \tilde{\omega}_j^i,$$

所以

$$\sum (\omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i) \wedge \omega^j = 0.$$

由Cartan引理可知

$$A_{jk}^i = A_{kj}^i. \tag{20}$$

从(14)易见，e_{n+1}沿着仿射法线方向等价于

$$\sum G^{ij} A_{ij}^k = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n. \tag{21}$$

后面我们将看到，这一条件等价于

$$\omega_{n+1}^{n+1} + \frac{1}{n+2} d\log H = 0. \tag{22}$$

外微分$\omega_i^{n+1} = \sum h_{ij}\omega^j$，并使用§1中的(6)和(7)我们得到

$$\sum \Big(dh_{ij} + h_{ij}\omega_{n+1}^{n+1} - \sum h_{kj}\omega_i^k - \sum h_{ik}\omega_j^k\Big) \wedge \omega^j = 0. \tag{23}$$

由Cartan引理，存在h_{ijk}使

$$\sum h_{ijk}\omega^k = dh_{ij} + h_{ij}\omega_{n+1}^{n+1} - \sum h_{kj}\omega_i^k - \sum h_{ik}\omega_j^k, \tag{24}$$

① A_{ik}^j的定义在文献中不统一，我们这里采用常见的一种，它与有些作者的定义相差一个符号或一个常数倍。

$$h_{ijk} = h_{jik} = h_{ikj}. \tag{25}$$

对(24)两端乘以 $H^{\frac{-1}{n+2}}$,便有

$$dG_{ij} + \frac{1}{n+2}G_{ij}d\log H + G_{ij}\omega_{n+1}^{n+1} - \sum G_{ik}\omega_j^k - \sum G_{kj}\omega_i^k = H^{\frac{-1}{n+2}}\sum h_{ijk}\omega^k. \tag{26}$$

另一方面,关于 G 的连络形式 $\tilde{\omega}_i^j$,

$$dG_{ij} - \sum G_{ik}\tilde{\omega}_j^k - \sum G_{kj}\tilde{\omega}_i^k = 0 \tag{27}$$

(18)、(26)和(27)的结合,产生

$$\left(\omega_{n+1}^{n+1} + \frac{1}{n+2}d\log H\right)G_{ij} - \sum G_{ik}A_{jl}^k\omega^l - \sum G_{kj}A_{il}^k\omega^l = H^{\frac{-1}{n+2}}\sum h_{ijk}\omega^k. \tag{28}$$

令

$$\omega_{n+1}^{n+1} + \frac{1}{n+2}d\log H = \sum a_k\omega^k, \tag{29}$$

则(28)变成

$$a_kG_{ij} - \sum G_{il}A_{jk}^l - \sum G_{lj}A_{ik}^l = H^{\frac{-1}{n+2}}h_{ijk}. \tag{30}$$

对(30)两端乘以 G^{ij} 并对 i、j 求和,我们得到

$$na_k - 2\sum A_{jk}^j = H^{\frac{-1}{n+2}}\sum G^{ij}h_{ijk}. \tag{31}$$

对(30)两端乘以 G^{ik},并对 i、k 求和,便有

$$a_j - \sum A_{kj}^k = H^{\frac{-1}{n+2}}\sum G^{ik}h_{ikj}, \tag{32}$$

其中用到了(20)、(21)和(25)。另一方面,我们用(H^{ij})表示(h_{ij})的伴随矩阵,即

$$\sum H^{ij}h_{jk} = \delta_k^i H.$$

由(24)可得

$$dH = \sum H^{ij}dh_{ij} = -(n+2)H\omega_{n+1}^{n+1} + \sum H^{ij}h_{ijk}\omega^k,$$

因此

$$(n+2)a_k = H^{\frac{-1}{n+2}}\sum G^{ij}h_{ijk}. \tag{33}$$

由(31)、(32)和(33)联立解得

$$a_j = 0, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

即(22)成立。反之，若(22)成立，则由(33)可知$\sum G^{ij}h_{ijk}=0$。由(31)可得$\sum A^i_{ik}=0$。对(30)两端乘以G^{ik}，并对i、k求和，可得

$$\sum G_{lj}G^{ik}A^l_{ik} = 0.$$

因此$\sum G^{ik}A^l_{ik}=0$，即e_{n+1}沿仿射法线方向。于是我们已经证明了下面的命题。

命题4.1　设M是A^{n+1}中的局部严格凸超曲面，$\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$是沿$M$的幺模仿射标架场，其中$e_1,e_2,\cdots,e_n\in T_xM$，则$e_{n+1}$沿着$M$的仿射法线方向的充要条件是(22)成立。

从(33)我们还得到

$$\sum G^{ij}h_{ijk} = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n. \tag{34}$$

把(22)代入(26)，即得

$$dG_{ij} - \sum G_{ik}\omega^k_j - \sum G_{kj}\omega^k_i = H^{\frac{-1}{n+2}}\sum h_{ijk}\omega^k. \tag{35}$$

这表明$H^{-\frac{1}{n+2}}h_{ijk}$是$G_{ij}$关于连络$\nabla'$的协变微商，因而是幺模仿射不变的。令

$$A_{ijk} = \sum G_{jl}A^l_{ik}, \tag{36}$$

我们证明

$$A_{ijk} = -\frac{1}{2}H^{\frac{-1}{n+2}}h_{ijk}. \tag{37}$$

由于等式两端都是张量，我们只需在一特殊的标架场下证明它们相等就行了。在M上选取关于G的单位正交标架场$\{x;e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，再选取e_{n+1}沿着点x的仿射法线方向，并且满足$[e_1,e_2,\cdots,e_n,$

$e_{n+1}]=1$，这时 $G_{ij}=\delta_{ij}$。由于 $G_{ij}=H^{\frac{-1}{n+2}}h_{ij}$，又有 $h_{ij}=\delta_{ij}$，$H=1$，$\omega_i^{n+1}=\omega^i$。从(22)式推出 $\omega_{n+1}^{n+1}=0$。外微分 $\omega_i^{n+1}=\omega^i$ 得

$$\sum \omega_i^j \wedge \omega^j = d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

即有

$$d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \frac{1}{2}(\omega_j^i - \omega_i^j). \tag{38}$$

因为 $\frac{1}{2}(\omega_j^i-\omega_i^j)$ 是反称的，根据黎曼几何的基本定理(参看[Cher-C])；(38)表明在上述标架场下 G 的 Levi-Civita 连络形式为

$$\tilde{\omega}_j^i = \frac{1}{2}(\omega_j^i - \omega_i^j). \tag{39}$$

因此

$$\sum A_{jk}^i \omega^k = \omega_j^i - \tilde{\omega}_j^i = \frac{1}{2}(\omega_j^i + \omega_i^j). \tag{40}$$

由于 $G_{ij}=\delta_{ij}$，(35)给出

$$-\omega_j^i - \omega_i^j = H^{\frac{-1}{n+2}} \sum h_{ijk} \omega^k. \tag{41}$$

由(40)和(41)可得

$$A_{ijk} = -\frac{1}{2} h_{ijk}.$$

这样便证明了(37)。从关系式(34)即得

$$\sum G^{ij} A_{ijk} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{42}$$

这个关系称为反极关系。

由(25)和(37)可知，A_{ijk} 关于 3 个下标是对称的。我们考虑 3 次微分式

$$A = \sum A_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k, \tag{43}$$

显然 A 是幺模仿射不变的。A 被称为 Fubini-Pick 形式，它刻划了 G 的 Levi-Civita 连络与 A^{n+1} 在 M 上的诱导连络的离差。从 A 我们还可以构造一个重要的不变量 J：

$$J = \frac{1}{n(n-1)}\sum G^{im}G^{jr}G^{kl}A_{ijk}A_{lrm} = \frac{1}{n(n-1)}\|A\|_G^2. \qquad (44)$$

式中 $\|\cdot\|_G$表示关于度量 G 的模。J 被称为 Pick 不变量。

在(37)的证明过程中，我们选用了特殊的标架场，使证明变得很简单。以后我们经常采用这种标架场。在这里我们把有关的公式列于后。设标架场$\{x;e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$满足 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in T_xM$，$e_1,\cdots,e_n$ 关于 Blaschke 度量 G 单位正交，并且 e_{n+1} 沿着点 x 的仿射法线方向，$[e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}]=1$。这时有

$$Y = e_{n+1},$$

$$H = 1,\quad h_{ij} = \delta_{ij} = G_{ij},$$

$$dx = \sum \omega^i e_i,$$

$$de_i = \sum \omega_i^j e_j + \omega^i e_{n+1},$$

$$\omega_{n+1}^{n+1} = 0,\quad \sum \omega_i^i = 0,$$

$$\omega_i^{n+1} = \omega^i,$$

$$\bar{\omega}_i^j = \frac{1}{2}(\omega_i^j - \omega_j^i),$$

$$\sum A_{ijk}\omega^k = \frac{1}{2}(\omega_i^j + \omega_j^i).$$

它类似于欧氏空间曲面论中的单位正交标架场。

§5　典型展开与仿射法线的几何意义

考虑 A^3 中的局部严格凸的曲面 M，在这一节，我们把 M 上的点关于 A^3 中固定的幺模仿射标架$\{O;\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$的坐标用下标表示，即 $x=(x_1,x_2,x_3)$。设 x_0 是 M 上任一点，在点 x_0，选幺模仿射标架$\{x_0;e_1,e_2,e_3\}$，使在这一点，$G_{ij}=\delta_{ij}$，e_3 沿着仿射法线方向。在 A^3

中作一么模仿射变换，把 x_0 放到原点，并且使 $\eta_1=e_1,\eta_2=e_2,\eta_3=e_3$。在 x_0 附近以 x_1、x_2 作为 M 的参数，x_3 作为 x_1、x_2 的函数，即 M 在 x_0 附近被给定成一个图。此时有

$$x_3(0,0)=0,\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1}(0,0)=0,\ \frac{\partial x_3}{\partial x_2}(0,0)=0.$$

于是 x_3 在点 x_0 的 Taylor 展式为

$$x_3=\frac{1}{2}\sum a_{ik}x_ix_k+\frac{1}{6}\sum a_{ijk}x_ix_jx_k+\cdots\quad. \tag{1}$$

在 x_0 附近选以下局部标架场：

$$e_1=(1,0,\frac{\partial x_3}{\partial x_1})$$

$$e_2=(0,1,\frac{\partial x_3}{\partial x_2})$$

e_3 沿着 M 在点 x 的仿射法线方向，并且满足

$$[e_1,e_2,e_3]=1.$$

在这个标架场下，我们有

$$\begin{aligned} h_{11}&=a_{11}+a_{111}x_1+a_{112}x_2+\cdots\\ h_{12}=h_{21}&=a_{12}+a_{121}x_1+a_{122}x_2+\cdots\\ h_{22}&=a_{22}+a_{221}x_1+a_{222}x_2+\cdots\quad. \end{aligned} \tag{2}$$

由于在点 x_0，$e_1=(1,0,0)=\eta_1$，$e_2=(0,1,0)=\eta_2$，并且 η_1、η_2 关于 Blaschke 度量正交，所以

$$(a_{11},a_{12},a_{22})=(1,0,1). \tag{3}$$

下面我们计算 M 在 x_0 点的 Fubini-Pick 形式。不难看出，在点 x_0 有 $\omega_i^j=0$，因此在点 x_0 有

$$A_{ijk}=-\frac{1}{2}H^{\frac{-1}{n+2}}h_{ijk}=-\frac{1}{2}a_{ijk}. \tag{4}$$

由 § 4 中的关系式(42)，a_{ijk} 满足

$$a_{111}+a_{221}=0,\quad a_{112}+a_{222}=0. \tag{5}$$

我们记　$a_{111}=a$，$a_{112}=b$，代入(1)，得

$$x_3=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{1}{6}(ax_1^3+3bx_1^2x_2-3ax_1x_2^2-bx_2^3)+\cdots \quad (6)$$

作变换

$$\begin{cases}\eta_1^*=\cos\theta\eta_1-\sin\theta\eta_2,\\ \eta_2^*=\sin\theta\eta_1+\cos\theta\eta_2,\end{cases} \quad (7)$$

则 η_1^*、η_2^* 关于 Blaschke 度量也是 T_xM 的单位正交基，这时

$$\begin{cases}a^*=a\cos^3\theta+3b\sin\theta\cos^2\theta-3a\sin^2\theta\cos\theta-b\sin^3\theta,\\ b^*=b\cos^3\theta-3a\sin\theta\cos^2\theta-3b\sin^2\theta\cos\theta+a\sin^3\theta\end{cases} \quad (8)$$

选取适当的 θ，使 $b^*=0$，这样 Pick 不变量为

$$J=\frac{a^{*2}}{2}. \quad (9)$$

不妨假定我们一开始就选定了标架场使 $b=0$，在此标架场下，得到如下的典型展开：

$$x_3=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{a}{6}(x_1^3-3x_1x_2^2)+\cdots, \quad (10)$$

其中 Pick 不变量为

$$J=\frac{a^2}{2}.$$

现在我们利用曲面在一点的典型展开，给出仿射法线的几何解释。设 Γ 是 A^2 中的封闭曲线，它围成的区域记为 Ω。假定区域 Ω 内均匀分布着某种物质，这些物质的重心由下式确定

$$\bar{x}_k=\frac{\int_\Omega x_k dv}{\int_\Omega dv} \qquad k=1,2, \quad (11)$$

其中 dv 是 A^2 中的面积元素。显然重心是仿射不变的。

我们用 Π 表示 M 在点 x_0 的切平面，由典型展开式(10)可知，过点 x_0 附近一点且平行于 Π 的平面交 M 于一条封闭的曲线 Γ，Γ 所围成的平面区域 Ω 的重心记为 $S=(S_1,S_2,S_3)$，当这张平行于

Π 的平面平行移动时，重心 S 就构成一条重心曲线 $S(t)$。为了便于计算 S 的坐标，我们引入柱面坐标

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ x_2 = r\sin\theta, \\ x_3 = t^2, \end{cases} \tag{12}$$

则典型展开式成为

$$t^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{6}c + \cdots, \tag{13}$$

其中　$c=a(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)$. 反演可得

$$r = \sqrt{2}\,t - \frac{c}{3}t^2 + \cdots, \tag{14}$$

因此重心 S 的坐标为：

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} r^3\cos\theta d\theta}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} r^2 d\theta}, \\ S_2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} r^3\sin\theta d\theta}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} r^2 d\theta}, \\ S_3 = t^2. \end{cases} \tag{15}$$

把(14)代入(15)，并注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi} c\cos\theta d\theta = a\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^4\theta - 3\cos^2\theta\sin^2\theta)d\theta = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c\sin\theta d\theta = a\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^3\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^3\theta)d\theta = 0,$$

便得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^2 d\theta = 4\pi t^2 + [4],$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^3\cos\theta d\theta = [6],$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^3 \sin\theta d\theta = [6] \tag{16}$$

即

$$S_1 = [4], \quad S_2 = [4], \quad S_3 = t^2,$$

式中[4]、[6]分别表示 t 的 4 阶、6 阶项。因此在点 x_0(即原点)，

$$dS_1 : dS_2 : dS_3 = 0 : 0 : 1, \tag{17}$$

即 M 在点 x_0 的仿射法线与重心线 $S(t)$ 在点 x_0 的切线重合。如图 1 所示。

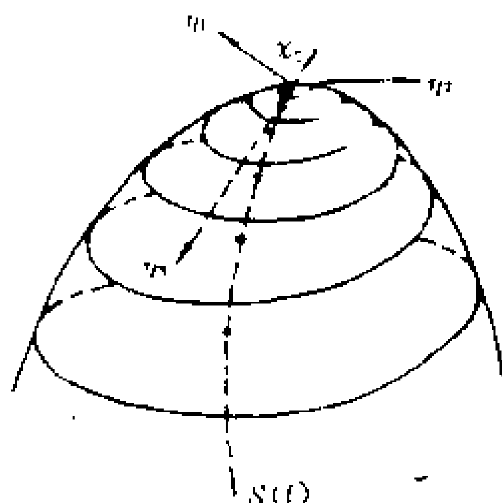


图 1

不难看出，对于 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面有与(10)类似的典型展开式，仿射法线也有同样的几何意义。

§6　仿射平均曲率

设 M 是 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面，沿着 M 选取局部幺模仿射标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in T_x M$，$e_{n+1}$ 沿着点 x 的仿射法线方向，于是由命题 4.1，

$$\omega_{n+1}^{n+1} + \frac{1}{n+2} d\log H = 0. \tag{1}$$

外微分(1)，得

$$\sum \omega_{n+1}^i \wedge \omega_i^{n+1} = 0. \tag{2}$$

由于 M 是局部严格凸的，我们可以假定(h_{ij})是正定的，因此 ω_1^{n+1}、ω_2^{n+1}、…、ω_n^{n+1} 线性无关。从(2)推出①

$$\omega_{n+1}^i = -\sum l^{ij}\omega_j^{n+1}, \tag{3}$$

$$l^{ij} = l^{ji}.$$

因此

$$\omega_{n+1}^i = -\sum l_j^i \omega^j, \tag{4}$$

其中

$$l_j^i = \sum h_{jk} l^{ki}. \tag{5}$$

我们构造一个二次微分式

$$B = -\sum \omega_{n+1}^i \omega_i^{n+1} = \sum l^{ij}\omega_i^{n+1}\omega_j^{n+1} = \sum l^{ij} h_{ik} h_{jl} \omega^k \omega^l. \tag{6}$$

我们研究在保持仿射法线不变的标架变换下 B 的变化情况。令

$$\begin{cases} e_i^* = \sum a_i^j e_j, \\ e_{n+1}^* = a^{-1} e_{n+1}, \end{cases}$$

其中 $a=\det(a_i^j)$。由§1中的(4)式，

$$\omega_i^{*n+1} = [e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*, de_i^*] = \sum a a_i^j \omega_j^{n+1}. \tag{7}$$

另一方面，

$$de_{n+1}^* \equiv a^{-1} de_{n+1} \mod e_{n+1},$$

① 本书中的 l^{ij} 与有些作者定义的相差一个符号。

$$de^*_{n+1} \equiv \sum \overset{*}{\omega}^i_{n+1} e^*_i \quad \mod e_{n+1},$$

$$de_{n+1} \equiv \sum \omega^i_{n+1} e_i \quad \mod e_{n+1},$$

因此

$$\omega^i_{n+1} = a \sum a^i_j \overset{*}{\omega}^j_{n+1}. \tag{8}$$

(7)和(8)一起给出

$$-\sum \omega^i_{n+1} \omega^{n+1}_i = -a \sum a^i_j \overset{*}{\omega}^j_{n+1} \omega^{n+1}_i = -\sum \overset{*}{\omega}^i_{n+1} \overset{*}{\omega}^{n+1}_i.$$

这表明 B 在保持仿射法线不变的标架变换下是不变的。因此，B 关于 M 的 Blaschke 度量 G 的特征根，即矩阵$(H^{\frac{1}{n+2}} l_{ij})$的特征根，是仿射不变的。这些特征根被称为 M 的**仿射主曲率**，记为 λ_1、λ_2、…、λ_n。令

$$L_r = \frac{1}{\binom{r}{n}} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_r}, \tag{9}$$

$$r = 1, 2, \cdots, n \quad L_0 := 1.$$

L_r 被称为 M 的**第 r 阶仿射平均曲率**。特别，L_1 被称为 M 的**仿射平均曲率**，显然有

$$L_1 = \frac{1}{n} \sum H^{\frac{1}{n+2}} l_{ii}. \tag{10}$$

满足 $L_1 = 0$ 的超曲面称为**仿射极大曲面**，我们将在第四章讨论它。

以后，我们把 B 称为 M 上的**仿射第三基本形式**，并记为

$$B = \sum B_{ij} \omega^i \omega^j, \tag{11}$$

其中

$$B_{ij} = \sum l^{kl} h_{ik} h_{jl}. \tag{12}$$

§7　仿射余法矢

7.1　仿射余法矢

设 A^{n+1} 中全体向量的集合为 V。现在考虑 V 的对偶空间 V^*，它是由定义在 V 上的全体线性函数所构成的空间。它也是一个 $n+1$ 维实线性空间。由于 V 中有“有向体积”的概念，即指定了一个不为零的 $n+1$ 次外矢量作为 $\Lambda^{n+1}(V)$ 的基。因此存在一个典型同构 $i:\Lambda^n(V)\to V^*$，这种典型同构可以描述如下：设 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$ 是 V 的一基底，它满足 $[e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}]=1$，即 $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{n+1}$ 是指定的 $n+1$ 次外矢量。设 α 是 $\Lambda^n(V)$ 中的任意一个元素，对任意的 $v\in V$，$\alpha\wedge v$ 是 $n+1$ 次外矢量，因而存在实数 $a\in R$，使

$$\alpha\wedge v=ae_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{n+1}.$$

$i(\alpha)$ 是 V^* 中的一个矢量，它在 v 上的值定义为

$$i(\alpha)(v)=\langle i(\alpha),v\rangle:=a,$$

其中 $\langle,\rangle:V^*\times V\to R$ 是典型配合。不难证明 i 是从 $\Lambda^n(V)\to V^*$ 的一个同构。在这个同构下，我们把 $\Lambda^n(V)$ 与 V^* 等同起来。

设 M 是 A^{n+1} 中局部严格凸的超曲面。在§4 中我们定义了仿射法矢的概念，现在我们定义仿射余法矢的概念。对每一点 $x\in M$，存在一个仿射法向量 $Y\in V$，它横截于 T_xM。我们按以下条件在点 x 定义一个“余矢量”$U\in V^*$，

$$\langle U,v\rangle=0,\forall\ v\in T_xM,\tag{1}$$

$$\langle U,Y\rangle=1,\tag{2}$$

不难看出，U 是唯一确定的。

定义 7.1　由(1)和(2)确定的 V^* 中的向量 U 被称为 M 在点 x 的仿射余法矢量。

若在 M 上取局部幺模仿射标架场，使 $e_{n+1}=Y, e_1, e_2, \cdots, e_n \in T_xM$，则 U 可以与 $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ 等同起来，因为显然上面的(1)和(2)满足。一般地，由§4中的(17)，U 可以与 $H^{\frac{-1}{n+2}} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ 等同起来。

下面我们计算 U 的拉普拉斯 ΔU。由于算子 Δ 与局部坐标的选取无关，为了计算简便，我们选取局部幺模仿射标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ 使 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in T_xM$，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 关于 M 的 Blaschke 度量 G 是单位正交的，并且 $Y=e_{n+1}$。这时 $H=1$，$\omega_{n+1}^{n+1}=0$，$G_{ij}=h_{ij}=\delta_{ij}$。对于一个固定点 $x \in M$，我们还可以要求(参看[Cher—C])

$$\tilde{\omega}_i^j|_x = 0, \tag{3}$$

$(\tilde{\omega}_i^j)$ 为 Blaschke 度量 G 的连络矩阵。在这些条件下，我们有

$$\begin{aligned} dU &= d(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n) \\ &= \sum e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k-1} \wedge \omega_k^{n+1} e_{n+1} \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (\sum \omega_k^k) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_i (\sum_k h_{ik} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k-1} \wedge e_{n+1} \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n) \omega^i \end{aligned} \tag{4}$$

即

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_k h_{ik} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k-1} \wedge e_{n+1} \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{n+1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned} \tag{5}$$

外微分 U_i 得

$$\begin{aligned} dU_i &= \sum_{k \neq i} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{k-1} \wedge de_k \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \\ &\quad \wedge e_{n+1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n + \omega_{n+1}^i e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= (\sum_{k \neq i} \omega_k^k) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_{n+1} \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

$$+\sum_{k\neq i}\omega_i^k e_1\wedge\cdots\wedge e_{k-1}\wedge e_i\wedge e_{k+1}\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge e_{n+1}$$

$$\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_n+\omega_{n+1}^i e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$$

$$=-\sum_k\omega_i^k U_k+\omega_{n+1}^i U. \tag{6}$$

由(3)，在点 x 我们有

$$\omega_i^k=\sum A_{kj}^i\omega^j=\sum A_{ij}^k\omega^j, \tag{7}$$

把(7)代入(6)，并利用 § 6 中的(10)，我们得到

$$dU_i=\sum_j\left(-\sum A_{ij}^k U_k-B_{ij}U\right)\omega^j, \tag{8}$$

$$\sum U_{,ij}\omega^j\doteq dU_i-\sum\tilde{\omega}_i^k U_k=dU_i$$

即

$$U_{,ij}=-\sum A_{ij}^k U_k-B_{ij}U. \tag{9}$$

由 § 4 中的(6)和(21)，我们得到

$$\Delta U=-nL_1U. \tag{10}$$

由于 x 是任意的点，所以(10)式在整个 M 上成立。

7.2　仿射支撑函数

我们先导出仿射余法矢的微商的两个重要公式。沿着 M 选取幺模仿射标架场 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使 $e_{n+1}=Y$，$e_1,e_2,\cdots,e_n\in T_xM$。由(1)知

$$\langle U,e_i\rangle=0. \tag{11}$$

外微分(2)得

$$0=\sum\langle U_i,Y\rangle\omega^i+\sum\langle U,e_i\rangle\omega_{n+1}^i=\sum\langle U_i,Y\rangle\omega^i,$$

因此有

$$\langle U_i,Y\rangle=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

外微分(11)得

$$0=\sum\langle U_j,e_i\rangle\omega^j+\sum\langle U,\omega_i^j e_j+\omega_i^{n+1}e_{n+1}\rangle$$

$$= \sum_j (\langle U_j, e_i\rangle + G_{ij})\omega^j,$$

此式表明

$$\langle U_i, e_j\rangle = -G_{ij}. \tag{13}$$

定义 7.2　设 b 为 A^{n+1} 中的任意常向量，称函数

$$p(x) = \langle U, b - x\rangle,\ x \in M$$

为 M 关于 b 的**仿射支撑函数**(affine support function)。如果 $b=0$，称

$$p(x) = \langle U, -x\rangle$$

为 M 关于原点的**仿射支撑函数**。

下面我们计算 $p(x)$ 的拉普拉斯 Δp。由(11)可得

$$dp = \langle dU, b - x\rangle + \langle U, -dx\rangle = \sum \langle U_i, b - x\rangle\omega^i,$$

因此

$$p_i = \langle U_i, b - x\rangle.$$

由 § 4 中的公式(2)，

$$\begin{aligned}\sum p_{,ij}\omega^j &= dp_i - \sum \tilde{\omega}_i^j p_j \\ &= \langle dU_i, b - x\rangle + \langle U_i, -dx\rangle - \sum \tilde{\omega}_i^j p_j \\ &= \langle dU_i - \sum \tilde{\omega}_i^j U_j, b - x\rangle - \sum \langle U_i, e_j\rangle\omega^j \\ &= \sum (\langle U_{,ij}, b - x\rangle - \langle U_i, e_j\rangle)\omega^j.\end{aligned}$$

因此，由(10)、(13)得

$$\Delta p = \langle \Delta U, b - x\rangle + n = -nL_1 p + n. \tag{14}$$

§ 8　二次曲面

8・1　三种典型曲面

对于 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面，我们已经引入了 Blaschke 度量、Fubini—Pick 形式、仿射法矢、仿射余法矢，以及仿射平均曲率和 Pick 不变量。以下我们对几种特殊的曲面计算这些几何量。由于当 A^{n+1} 中取定了一固定的幺模仿射标架后，A^{n+1} 与 R^{n+1} 同构，因此本段的例子在 R^{n+1} 中考虑。为了书写简便，在这一段中我们用下标表示 R^{n+1} 中的坐标，即 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$。

例 1　椭圆抛物面

$$M: x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),\ (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in R^n,$$

我们选取如下局部幺模仿射标架场：

$$e_1 = (1,0,\cdots,0,x_1),$$
$$e_2 = (0,1,0,\cdots,0,x_2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$e_n = (0,\cdots,0,1,x_n),$$
$$e_{n+1} = (0,\cdots,0,1)。$$

容易算得　$h_{ij}=\delta_{ij}$。因此　$H=1$，　$G_{ij}=\delta_{ij}$。即 M 的 Blaschke 度量为

$$G = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2。$$

不难算得

$$\Delta x_1 = 0,\ \Delta x_2 = 0,\cdots,\ \Delta x_n = 0,$$

$$\Delta x_{n+1} = \frac{1}{2}\Delta(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = n, \tag{1}$$

因此

$$Y = (0,\cdots,0,1) = e_{n+1}. \tag{2}$$

由于 $de_{n+1}=0$，我们有 $\omega_{n+1}^i=0$. 因而

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{3}$$

另外，在我们所选的标架场下，$\omega_j^i = 0, \tilde{\omega}_i^j = 0$，因此

$$A_{ijk} = 0,\quad J = 0$$

例 2　椭球面

$$M:\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}=1,$$

其中 a_1、a_2、$\cdots a_{n+1}$ 为正常数。经过一个么模仿射变换，M 的方程可以写成

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=r^2,$$

r 为正常数。在 R^{n+1} 中引进自然的欧氏内积：

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{n+1}y_{n+1},\quad x、y\in R^{n+1}$$

在 M 上选取按这个内积的局部正交标架场 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in T_xM$，$e_{n+1}$ 是点 x 的单位法向量，并且指向 M 的内部。适当安排 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的次序，可使 $[e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}]=1$。在这些条件下，我们有

$$e_{n+1}=-\frac{1}{r}x,\tag{4}$$

$$de_{n+1}=-\frac{1}{r}dx,$$

$$\omega_j^{n+1}=-\omega_{n+1}^j=\frac{1}{r}\omega^j,\tag{5}$$

$$h_{ij}=\frac{1}{r}\delta_{ij},\quad H=\frac{1}{r^n},\tag{6}$$

$$G_{ij}=r^{\frac{-2}{n+2}}\delta_{ij}.\tag{7}$$

用 G、g 分别表示 M 上的 Blaschke 度量和上述 R^{n+1} 中的欧氏内积在 M 上的诱导度量，则

$$G=r^{\frac{-2}{n+2}}g.\tag{8}$$

设 Δ_G、Δ_g 分别表示关于 G 和 g 的拉普拉斯算子，则

$$\Delta_G=r^{\frac{2}{n+2}}\Delta_g.\tag{9}$$

由欧氏空间超曲面论的公式

$$\Delta_g x = \frac{n}{r} e_{n+1} = -\frac{n}{r^2} x, \tag{10}$$

立刻得到

$$Y = \frac{1}{n} \Delta_G x = \frac{1}{n} r^{\frac{2}{n+2}} \Delta_g x = -r^{-\frac{2n+2}{n+2}} x. \tag{11}$$

上式表明 M 的仿射法线平行于位置矢量。其实这一点不经过计算也能看出。设过点 x 且与球面相切的超平面为 π，则与 π 平行的超平面与球面相交于一个低一维的球面，其中心的轨迹就是原来的球的直径。由 § 5 中仿射法线的几何意义立刻推出此结论。下面继续计算仿射主曲率与 Pick 不变量。由(5)我们得到

$$B = \frac{1}{r^2}[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \cdots + (\omega^n)^2]. \tag{12}$$

因此，B 相对于 G 的特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = r^{-\frac{2n+2}{n+2}}. \tag{13}$$

又由于 $G = r^{-\frac{2}{n+2}} g$，不难看出

$$\omega_i^j - \tilde{\omega}_i^j = 0,$$

因此

$$A_{ijk} = 0, \qquad J = 0.$$

例 3 双曲面

$$M: \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -c^2,$$

其中 c 为正常数。在 R^{n+1} 中引入闵可夫斯基(Minkowski)内积：

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}, \quad x、y \in R^{n+1},$$

对于 M 上的点，有

$$\langle x, x \rangle = -c^2, 或 \left\langle \frac{x}{c}, \frac{x}{c} \right\rangle = -1, \tag{14}$$

因此

$$\langle dx, x \rangle = 0.$$

在 M 上取局部标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in T_x M$，而

$e_{n+1}=\frac{x}{c}$，则

$$<e_i,e_{n+1}>=0,\quad <e_{n+1},e_{n+1}>=-1 \tag{15}$$

令

$$<e_i,e_j>=g_{ij}$$

，由线性代数中的惯性指标定理可知 (g_{ij}) 是正定的，因此 R^{n+1}中的闵可夫斯基度量在M上诱导了一个正定的黎曼度量。根据斯密特(*Schmidt*)正交方法，我们可以通过 $e_1,e_2,\cdots,e_n$作出 M 上的正交标架场。不妨设它已经是单位正交标架场，则

$$(<e_A,e_B>)=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}$$

记　$e_A=(\eta_A^1,\eta_A^2,\cdots,\eta_A^{n+1})$，这里我们用上标表示矢量的分量。上式说明

$$\begin{pmatrix}\eta_1^1 & \cdots & \eta_1^{n+1}\\ \vdots & & \vdots\\ \eta_{n+1}^1 & \cdots & \eta_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1^1 & \cdots & \eta_{n+1}^1\\ \vdots & & \vdots\\ \eta_1^{n+1} & \cdots & \eta_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{vmatrix}\eta_1^1 & \cdots & \eta_1^{n+1}\\ \vdots & & \vdots\\ \eta_{n+1}^1 & \cdots & \eta_{n+1}^{n+1}\end{vmatrix}^2=1.$$

适当选择次序可使 $[e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}] = 1$，即它是 M 上的幺模仿射标架场。由 $\langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = -1$，　$\langle e_i, e_{n+1}\rangle = 0$，　$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ 可得

$$\langle \omega_i^{n+1} e_{n+1}, e_{n+1}\rangle + \langle e_i, \sum \omega_{n+1}^j e_j\rangle = 0,$$

$$\omega_{n+1}^i = \omega_i^{n+1}. \tag{16}$$

与例 2 中类似的计算可得

$$\omega_i^{n+1} = \omega_{n+1}^i = \frac{1}{c}\omega^i, \tag{17}$$

$$G_{ij} = c^{\frac{-2}{n+2}}\delta_{ij}, \tag{18}$$

$$\Delta_G = c^{\frac{2}{n+2}}\Delta g. \tag{19}$$

现在计算 $\Delta_g x$。由于

$$de_i = \sum \omega_i^j e_j + \frac{1}{c}\omega^i e_{n+1},$$

容易算得

$$\Delta_g x = \frac{n}{c}e_{n+1} = \frac{n}{c^2}x, \tag{20}$$

从而仿射法矢为

$$Y = c^{-\frac{2n+2}{n+2}}x. \tag{21}$$

即仿射法线平行于位置矢量。不难推得

$$B = -\frac{1}{c^2}[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \cdots + (\omega^n)^2], \tag{22}$$

因此 B 相对于 G 的特征根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = -c^{-\frac{2n+2}{n+2}} \tag{23}$$

再由(18)推得

$$A_{ijk} = 0, \qquad J = 0.$$

8.2　$J = 0$ 的曲面

我们看到，在 8.1 的三个例子中的曲面都满足 $J=0$。下面的定理 8.1 就说明 $J=0$ 实际上在局部上刻划了上述三种曲面。

定理8.1　设 M 是 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面，如果在 M 上处处 $J=0$，则 M 是上述三种曲面之一。

证明　在 M 上选取局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使 $G_{ij}=\delta_{ij}, e_{n+1}=Y$。由于 $J=0$，即有 $A_{ijk}=0$。从而由 § 4 中的 (40)式，得

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0. \tag{24}$$

外微分(24)式得

$$\omega_i^{n+1}\wedge\omega_{n+1}^j+\omega_j^{n+1}\wedge\omega_{n+1}^i=0.$$

把 $\omega_{n+1}^i=-\sum l^{ij}\omega_j^{n+1}=-\sum l^{ij}\omega^j$ 代入上式得

$$\sum(\delta_{ik}l^{jl}+\delta_{jk}l^{il})\omega^k\wedge\omega^l=0.$$

因此有

$$\delta_{ik}l^{jl}+\delta_{jk}l^{il}-\delta_{il}l^{jk}-\delta_{jl}l^{ik}=0. \tag{25}$$

在(25)中缩并 i 和 l 得

$$l^{jk}=a\delta^{jk},$$

其中　$a=\frac{1}{n}\sum l^{ii}$。从而

$$\omega_{n+1}^j=-a\omega^j. \tag{26}$$

外微分(26)式得

$$da\wedge\omega^j=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此

$$a=\text{常数}. \tag{27}$$

下面分两种情形讨论：

1)　$a=0$，即 $\omega_{n+1}^i=0$。由此得 $de_{n+1}=0$，这说明 e_{n+1} 是常矢。我们在 A^{n+1} 中选固定的幺模仿射标架，使 $e_{n+1}=(0,\cdots,0,1)$，这说明 M 可局部地写成

$$x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n).$$

再取标架场

$$e_1^* = (1, 0, \cdots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}),$$

$$e_2^* = (0, 1, \cdots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_n^* = (0, \cdots, 0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_n}),$$

则关于这标架场有

$$\omega_i^j = 0, \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

由于 $\omega_{n+1}^{n+1} = 0$，故有

$$H = C = 常数.$$

因此

$$G_{ij} = C^{-\frac{1}{n+2}} h_{ij}.$$

但是，由 § 4 中的(35)有

$$dG_{ij} = dG_{ij} - \sum_k \omega_i^k G_{kj} - \sum_k \omega_j^k G_{ik} = 0,$$

故 G_{ij} = 常数。因此

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 常数,$$

即 f 是二次多项式。经过适当的幺模仿射变换后，可设

$$x_{n+1} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2,$$

其中 $a_i > 0$，i 是因为 (h_{ij}) 正定。再作一个幺模仿射变换，可把它变成

$$x_{n+1} = \rho(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

其中 ρ 为 常数。这是一个椭圆抛物面。

2) $\neq 0$。由(26)式得

$$d\left(x+\frac{e_{n+1}}{a}\right)=0,$$

即　$x+\frac{e_{n+1}}{a}=$ 常矢。变动坐标原点，可以假定

$$e_{n+1}=-ax. \tag{28}$$

设 $\{0;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n+1}\}$ 是 A^{n+1} 中一固定的幺模仿射标架，关于这个标架，x、e_1、$\cdots$、e_{n+1} 的坐标分别设为 x_A、e_1^A、$\cdots$、e_{n+1}^A。由于 $de_{n+1}=-a\sum\omega^i e_i$，我们有

$$-d\left(\frac{1}{a}e_{n+1}^A e_{n+1}^B\right)=\sum e_k^A e_{n+1}^B\omega^k+\sum e_k^B e_{n+1}^A\omega^k.$$

另一方面，由 $de_i=\sum\omega_i^j e_j+\sum\omega^i e_{n+1}$，又有

$$d\left(\sum_i e_i^A e_i^B\right)=\sum e_k^A e_{n+1}^B\omega^k+\sum e_k^B e_{n+1}^A\omega^k.$$

从而有

$$d\left(\sum_i e_i^A e_i^B\right)=-d\left(\frac{1}{a}e_{n+1}^A e_{n+1}^B\right),$$

即

$$\sum_i e_i^A e_i^B+\frac{1}{a}e_{n+1}^A e_{n+1}^B:=c_{AB}=\text{常数}.$$

令

$$E=\begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \cdots & e_{n+1}^1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ e_1^{n+1} & e_2^{n+1} & \cdots & e_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \frac{1}{a}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n+1\,1} & c_{n+1\,2} & \cdots & c_{n+1\,n+1}\end{pmatrix},$$

C 是常数矩阵。我们有

$$EFE^T=C,$$

式中 E' 表示 E 的转置。对于 M 的一固定点 x_0，我们总可选取 A^{n+1} 的幺模仿射标架 η_1、η_2、…，η_{n+1}，使 $\eta_A = e_A(x_0)$。从而在点 x_0，E 为单位矩阵。由此有 $F = C$。由于 C 是常数矩阵，所以在 M 上处处成立

$$EFE' = F.$$

从而

$$E'F^{-1}E = F^{-1}.$$

比较上式两端第 $n+1$ 列、第 $n+1$ 行处的元素得

$$\sum_i (e^i_{n+1})^2 + a(e^{n+1}_{n+1})^2 = a.$$

由(28)有

$$\sum x_i^2 + ax_{n+1}^2 = \frac{1}{a}. \qquad (29)$$

即 M 是一个二次曲面。由(26)，a 恰是 M 的仿射主曲率，即有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = a.$$

当 $a > 0$ 时，作幺模仿射变换

$$\begin{cases} x_i^* = a^{-\frac{1}{2n+2}}x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ x_{n+1}^* = a^{\frac{n}{2n+2}}x_{n+1} \end{cases}$$

(29)变为

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} + \cdots + x_{n+1}^{*2} = a^{-\frac{n+2}{n+1}},$$

它是一椭球面。

当 $a < 0$ 时，作幺模仿射变换

$$\begin{cases} x_i^* = (-a)^{\frac{-1}{2n+2}}x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ x_{n+1}^* = (-a)^{\frac{n}{2n+2}}x_{n+1}, \end{cases}$$

(29)变为

$$x_1^{*2} + x_2^{*2} + \cdots + x_n^{*2} - x_{n+1}^{*2} = -(-a)^{-\frac{n+2}{n+1}},$$

它是一双曲面。证毕。

§9 基本公式与基本定理

设 M 是 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面。我们在 M 上定义了两个二次微分形式和一个三次微分形式：

$$G = \sum G_{ij}\omega^i\omega^j,$$

$$B = \sum B_{ij}\omega^i\omega^j, \quad A = \sum A_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k.$$

G 和 A 满足反极关系：

$$\sum G^{ij}A_{ijk} = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

这些形式不是独立的，作为超曲面上的微分形式，它们还满足进一步的关系式，即一组可积性条件。我们将看到 G 和 A 是基本的，B 可以由它们表示出来。下面我们就来研究这些关系。

在 M 上选取局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使 $e_1,e_2,\cdots,e_n \in T_xM$， $G_{ij} = \delta_{ij}$， $e_{n+1} = Y$，则

$$\begin{cases} dx = \sum \omega^i e_i, \\ de_i = \sum \omega_i^j e_j + \omega_i^{n+1} e_{n+1}, \\ de_{n+1} = \sum \omega_{n+1}^i e_i, \\ \omega_i^{n+1} = \omega^i, \quad \omega_{n+1}^{n+1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

一次微分式 ω^i、ω_i^j、ω_{n+1}^i 满足下面的结构方程：

$$\sum \omega_i^i = 0, \tag{2}$$

$$d\omega^j = \sum \omega^i \wedge \omega_i^j, \tag{3}$$

$$d\omega_j^i = \sum \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_j^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^i, \quad \omega_i^{n+1} = \omega^i, \tag{4}$$

$$d\omega_{n+1}^i = \sum \omega_{n+1}^j \wedge \omega_j^i, \tag{5}$$

其实(2)—(5)就是(1)的可积性条件，下面我们把这组可积性条件用 G_{ij}、A_{ijk}、B_{ij} 表示出来。在我们所取的标架场下有

$$\tilde{\omega}_i^j = \frac{1}{2}(\omega_i^j - \omega_j^i), \tag{6}$$

$$\omega_i^j - \tilde{\omega}_i^j = \frac{1}{2}(\omega_i^j + \omega_j^i) = \sum A_{ijk}\omega^k, \tag{7}$$

$$\omega_{n+1}^i = -\sum l^{ik}\omega_k^{n+1} = -\sum l^{ik}\omega^k, \tag{8}$$

外微分(7)的第二个等式，我们得到

$$\sum \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \sum \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^j + \omega_j^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^i$$
$$= 2\sum dA_{ijk}\omega^k + 2\sum A_{ijk}\omega^l \wedge \omega_l^k.$$

再把(7)的第二个等式代入上式得

$$2\sum \left(dA_{ijk} - \sum A_{ijl}\omega_k^l - \sum A_{ilk}\omega_j^l - \sum A_{ljk}\omega_i^l\right) \wedge \omega^k$$
$$= \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^j + \omega_j^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^i.$$

把 $\omega_i^j = \tilde{\omega}_i^j + \sum A_{ijk}\omega^k$ 代入上式，并由 A_{ijk} 的对称性得到

$$2\sum \left(dA_{ijk} - \sum A_{ijl}\tilde{\omega}_k^l - \sum A_{ilk}\tilde{\omega}_j^l - \sum A_{ljk}\tilde{\omega}_i^l\right) \wedge \omega^k$$
$$= \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^j + \omega_j^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^i,$$

即是

$$2\sum A_{ijk,l}\omega^l \wedge \omega^k = -\sum (\delta_{il}l^{jk} + \delta_{jl}l^{ik})\omega^l \wedge \omega^k,$$

式中 $A_{ijk,l}$ 表示 A_{ijk} 关于度量 G 的协变微商。由上式可得

$$A_{ijk,l} - A_{ijl,k} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}l^{jl} + \delta_{jk}l^{il} - \delta_{il}l^{jk} - \delta_{jl}l^{ik}). \tag{9}$$

设 Ω_i^j、R_{ijkl} 分别为 M 关于 G 的曲率形式和黎曼曲率张量。由黎曼几何的基本公式：

$$\Omega_i^j = d\widetilde{\omega}_i^j - \sum \widetilde{\omega}_i^k \wedge \widetilde{\omega}_k^j, \tag{10}$$

$$\Omega_i^j = -\frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{11}$$

把(7)代入(10)，整理得到

$$\begin{aligned}\Omega_i^j = \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^j - \sum (dA_{ijk} - \sum A_{ijl}\widetilde{\omega}_k^l \\ - \sum A_{ilk}\widetilde{\omega}_j^l - \sum A_{ljk}\widetilde{\omega}_i^l) \wedge \omega^k + \sum A_{iml}A_{mjk}\omega^l \wedge \omega^k.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}R_{ijkl} = (A_{ijl,k} - A_{ijk,l}) + (\delta_{ik}l^{jl} - \delta_{il}l^{jk}) \\ + \sum (A_{iml}A_{mjk} - A_{imk}A_{mjl})\end{aligned} \tag{12}$$

把(9)代入(12)得到

$$\begin{aligned}R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}l^{jl} + \delta_{jl}l^{ik} - \delta_{il}l^{jk} - \delta_{jk}l^{il}) \\ + \sum (A_{iml}A_{mjk} - A_{imk}A_{mjl}).\end{aligned} \tag{13}$$

外微分(8)得

$$\sum (dl^{ik} + \sum l^{lk}\omega_l^i + \sum l^{il}\omega_l^k) \wedge \omega^k = 0.$$

由于 $\delta_{ij} = G_{ij}$，则有 $B_{ij} = l^{ij}$，再利用

$$\omega_l^k = 2\sum A_{lkm}\omega^m - \omega_k^l,$$

我们得到

$$\sum (dB_{ik} - \sum B_{il}\omega_k^l - \sum B_{lk}\omega_i^l) \wedge \omega^k = 2\sum B_{lk}A_{ilm}\omega^k \wedge \omega^m.$$

把 $\omega_i^j = \widetilde{\omega}_i^j + \sum A_{ijk}\omega^k$ 代入上式得

$$\sum (dB_{ik} - \sum B_{il}\widetilde{\omega}_k^l - \sum B_{lk}\widetilde{\omega}_i^l) \wedge \omega^k = \sum B_{lk}A_{ilm}\omega^k \wedge \omega^m.$$

由此推出

$$B_{ik,j}-B_{ij,k}=\sum(B_{lj}A_{lik}-B_{lk}A_{lij}).\tag{14}$$

公式(9)、(13)、(14)是在特殊的幺模仿射标架场下推出的，在一般的标架场下这些公式变为

$$A_{ijk,l}-A_{ijl,k}=\frac{1}{2}(G_{ik}B_{jl}+G_{jl}B_{ik}-G_{il}B_{jk}-G_{jk}B_{il}),\tag{15}$$

$$R_{ijkl}=\sum(A_{il}^{m}A_{mjk}-A_{ik}^{m}A_{mjl})$$
$$+\frac{1}{2}(G_{ik}B_{jl}+G_{jl}B_{ik}-G_{il}B_{jk}-G_{jk}B_{il}),\tag{16}$$

$$B_{ik,j}-B_{ij,k}=\sum(B_{jl}A_{ik}^{l}-B_{kl}A_{ij}^{l}).\tag{17}$$

公式(15)、(16)、(17)的等号两端都是张量，它们已在一个特殊的幺模仿射标架场下成立，因此它们在任意的幺模仿标架场下也成立。

本节开始时我们说过，B 可以由 G 和 A 表示出来，现在我们来证明这一断言。事实上，在公式(15)、(16)、(17)中通过对指标的缩并，我们可以得到以下的公式

$$\sum A_{jk,l}^{l}=\frac{n}{2}(L_1G_{jk}-B_{jk}),\tag{18}$$

$$R_{ik}=\sum A_{il}^{m}A_{mk}^{l}+\frac{n-2}{2}B_{ik}+\frac{n}{2}L_1G_{ik},\tag{19}$$

$$\sum_i B_{k}^{i}{}_{,i}=nL_{1,k}+\sum B_{l}^{i}A_{ik}^{l},\tag{20}$$

其中 R_{ik} 为 M 关于 G 的李奇(Ricci)曲率。由(19)式可得

$$\chi=J+L_1,\tag{21}$$

式中

$$\chi=\frac{1}{n(n-1)}R=\frac{1}{n(n-1)}\sum G^{ik}G^{jl}R_{ijkl}.$$

上式中的 R 为 M 关于 G 的标量(scalar)曲率，χ 也被称为法化标量曲率。由(18)和(21)可得

$$B_{jk} = (\chi - J)G_{jk} - \frac{2}{n}\sum A_{jk}{}^{l}{}_{,l} \tag{22}$$

即 B_{ij} 可以通过 G_{ij} 和 A_{ijk} 表示。

现在不难证明以下的唯一性定理。

定理 9.1(唯一性) 设 M、$\overline{M}$ 为 A^{n+1} 中的两个局部严格凸的超曲面，$f: M \to \overline{M}$ 是一个微分同胚，使得

$$G = f^{*}\overline{G}, \quad A = f^{*}\overline{A},$$

式中的 f^{*} 为 f 的切映射 f_{*} 的对偶映射，则 M、$\overline{M}$ 相差 A^{n+1} 中一个幺模仿射变换。

证明 沿着 M 选取局部幺模仿射标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in T_xM$，$G_{ij} = \delta_{ij}$，$Y = e_{n+1}$。令 $\bar{e}_i = f_{*}(e_i)$，$1 \leqslant i \leqslant n$，$\bar{e}_{n+1}$ 沿着 M 在点 $f(x)$ 的仿射法线方向，并且满足 $[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_{n+1}] = 1$。则

$$\bar{\omega}^{i} = \omega^{i}, \quad \overline{G}_{ij} = G_{ij}, \quad \overline{A}_{ijk} = A_{ijk},$$

此处我们已经把 $f^{*}\bar{\omega}^{i}$ 与 $\bar{\omega}^{i}$ 等同起来了。因此

$$\overline{Y} = \bar{e}_{n+1}.$$

由此推出

$$\bar{\omega}_{i}^{j} = \bar{\omega}_{i}^{j}, \quad \bar{\omega}_{i}^{j} = \omega_{i}^{j}.$$

从(22)还可以得到

$$\overline{B}_{jk} = B_{jk}, \qquad \bar{\omega}_{n+1}^{i} = \omega_{n+1}^{i}$$

设 $x_0 \in M$ 为一固定点，对 $\overline{M}$ 作一幺模仿射变换 σ（行列式为 1 或 -1）可使

$$x_0 = \sigma f(x_0), \quad e_i(x_0) = \sigma(\bar{e}_i(x_0)),$$
$$e_{n+1}(x_0) = \sigma(\bar{e}_{n+1}(x_0))$$

设 x 是 M 上的任意点，作曲线 $x(t) \in M$，沿着这条曲线，(1)变成一组常数微分方程，由于 $\omega_A{}^B = \bar{\omega}_A{}^B$，$\omega^i = \bar{\omega}^i$，由常微分方程的初值问题的解的唯一性定理可知，$x(t)$ 与 $\sigma(\bar{x}(t))$ 重合。由 x 的任意性，M

必与 $\sigma(\overline{M})$ 重合。证毕。

下面我们讨论存在性问题。设 M 是一个 n 维光滑流形，在 M 上给定了正定黎曼度量 $G=\sum G_{ij}\omega^i\omega^j$ 和一个对称的三阶协变张量场 A_{ijk}，满足条件 $\sum G^{ij}A_{ijk}=0,\quad k=1,2,\cdots,n$。我们希望找到一些条件，当 G_{ij}、A_{ijk} 满足这些条件时，存在一个局部严格凸的浸入 $x:M\to A^{n+1}$，使 G_{ij} 和 A_{ijk} 恰为这个浸入的 Blaschke 度量和 Fubini-Pick 形式。

在 M 上选取按 G 的局部单位正交余标架场 $\{\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^n\}$，这时 $G_{ij}=\delta_{ij}$

$$G=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2.$$

由黎曼几何的基本定理知，存在唯一的一组连络形式 $\tilde{\omega}_i^j$，使

$$d\omega^i=\sum\omega^j\wedge\tilde{\omega}_j^i,\tilde{\omega}_i^j+\tilde{\omega}_j^i=0.$$

令

$$\omega_i^j=\tilde{\omega}_i^j+A_{ijk}\omega^k,$$

由 A_{ijk} 的对称性不难看出

$$\omega_i^j+\omega_j^i=2\sum A_{ijk}\omega^k,$$

$$d\omega^i=\sum\omega^j\wedge\omega_j^i.$$

由条件 $\sum G^{ij}A_{ijk}=0$，可得

$$\sum\omega_i^i=0.$$

因此可积性条件(2)—(5)中的前两个条件可以满足。现在的关键问题是能否定义形式 ω_{n+1}^i 满足(4)和(5)。当 $n=2$ 时，存在唯一的形式 ω_3^i，使

$$d\omega_i^j=\sum\omega_i^k\wedge\omega_k^j+\omega^i\wedge\omega_3^j, \tag{23}$$

而不需要附加别的条件。事实上，令

$$\theta_i^j=d\omega_i^j-\sum\omega_i^k\wedge\omega_k^j=a_i^j\omega^1\wedge\omega^2,$$

则有

$$a_1^1 + a_2^2 = 0.$$

再令

$$\omega_3^1 = - B_{11}\omega^1 - B_{12}\omega^2,$$
$$\omega_3^2 = - B_{21}\omega^1 - B_{22}\omega^2,$$

代入(23),可计算出

$$B_{11} = a_2^1, \quad B_{12} = B_{21} = - a_1^1 = a_2^2, \quad B_{22} = - a_1^2.$$

前面推出的公式(9)、(13)、只依赖于可积性条件(3)和(4)。因此(18)、(21)成立。从而 $B_{ij} = (\chi - J)G_{ij} - \sum A_{ijl,l}$。现在只剩下一组可积性条件(5)了。由前面的推导可知,它等价于(17)。而在二维的情形只有两个独立方程:

$$B_{12,1} - B_{11,2} = \sum B_{l1}A_{l12} - \sum B_{l2}A_{l11},$$
$$B_{21,2} - B_{22,1} = \sum B_{l2}A_{l21} - \sum B_{l1}A_{l22}.$$

它等价于以下方程:

$$2L_{1,k} = \sum B_{ki,i} - \sum B_{jl}A_{jlk}, \quad k = 1,2$$

即

$$(\chi - J)_{,k} = \sum A_{jlm,m}A_{jlk} - \sum A_{jkl,lj} \tag{24}$$

于是当 A_{ijk}、G_{ij} 满足(24)式时,可积性条件(2)—(5)全部满足,因此方程组(1)可积,从而存在浸入 $x: M \to A^3$,不难看出 e_1、e_2、e_3 是幺模仿射标架场,并且以 G_{ij}、A_{ijk} 为 Blaschke 度量和 Fubini-Pick 形式。因此,我们得到下面定理。

定理 9.2(Radon)　设 M 是一个二维黎曼流形,其正定的黎曼度量为 $G = \sum G_{ij}\omega^i\omega^j$。设 A_{ijk} 是三阶对称协变张量场,满足 $\sum G^{ij}A_{ijk} = 0(k = 1,2)$ 和可积性条件(24),则存在一个局部严格凸的浸入 $x: M \to A^3$,使 G_{ij}、A_{ijk} 分别为该浸入的 Blaschke 度量和 Fubini-Pick 形式。

当 $n > 2$ 时,(5)是(3)和(4)的推论。事实上,外微分(4)式得

$$(d\omega_{n+1}^j - \sum \omega_{n+1}^k \wedge \omega_k^j) \wedge \omega^i = 0. \tag{25}$$

$$i、j = 1,2,\cdots,n.$$

令

$$\alpha^j = d\omega_{n+1}^j - \sum \omega_{n+1}^k \wedge \omega_k^j = \sum a_{kl}^j \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$a_{kl}^j = -a_{lk}^j, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

从(25)知

$$\alpha^j \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \cdots \wedge \omega^n = 0.$$

上式可直接推出

$$a_{12}^j = 0.$$

同理可推出对任意的 k、l，$a_{kl}^j = 0$。因此 $\alpha^j = 0$，即得

$$d\omega_{n+1}^j = \sum \omega_{n+1}^k \wedge \omega_k^j, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

于是，关键是能否定义 ω_{n+1}^i，使(4)式满足。由前面的推导知，从(4)可导出(15)、(16)，从而导出(22)。因此若能定义 ω_{n+1}^i 满足(4)，必然有(22)成立。把(22)代入(12)，便得到一个必要条件：

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = &(A_{ijl,k} - A_{ijk,l}) + (\chi - J)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \\ &+ \frac{2}{n}\sum(\delta_{il}A_{jkm,m} - \delta_{ik}A_{jlm,m}) \\ &+ \sum(A_{iml}A_{jmk} - A_{imk}A_{jml}). \end{aligned} \tag{26}$$

反之，若 G_{ij}、A_{ijk} 满足(26)，我们按(22)式定义 B_{ij}，反推回去可得

$$d\omega_i^j = \sum \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \omega^j \wedge \omega_{n+1}^i,$$

从而(4)满足。因此我们得到下面定理。

定理 9.3(存在性)　设 M 是 $n(n > 2)$ 维黎曼流形，其正定黎曼度量为 $G = \sum G_{ij}\omega^i\omega^j$。设在 M 上给定了三阶对称协变张量场 A_{ijk}，它满足可积性条件(26)和 $\sum G^{ij}A_{ijk} = 0$，$k = 1,2,\cdots,n$。则存在一个局部严格凸的浸入 $x: M \to A^{n+1}$，使 G_{ij} 和 A_{ijk} 分别为这个浸入

的 Blaschke 度量和 Fubini-Pick 形式。

现在我们把仿射微分几何中的有关局部公式在局部坐标系下作一总结。

设 $x: M \to A^{n+1}$ 为局部严格凸的光滑浸入，$(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ 为 M 上的局部坐标，在局部坐标系下 $x(M)$ 的 Blaschke 度量 G、Fubini-Pick 形式 A、仿射第三基本形式 B 可表示成

$$G = \sum G_{ij} du^i du^j,$$

$$A = \sum A_{ijk} du^i du^j du^k,$$

$$B = \sum B_{ij} du^i du^j.$$

用 x_i、x_{ij} 表示 x 关于 u^i 的普通微商，用 $x_{,ij}$、$x_{,ijk}$ 表示 x 关于 G 的协变微商，则

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i},$$

$$x_{ij} = \sum \Gamma_{ij}^k x_k + G_{ij} Y,$$

$$x_{,ij} = \sum A_{ij}^k x_k + G_{ij} Y,$$

$$\Delta x = nY,$$

$$Y_i = -\sum B_i^j x_j,$$

$$h_{ij} = [x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{ij}],$$

$$H = \det(h_{ij}),$$

$$G_{ij} = H^{-\frac{1}{n+2}} h_{ij}.$$

U 表示 M 上的仿射余法矢量场，它满足

$$\langle U, Y \rangle = 1,$$

$$\langle U, x_i \rangle = \langle U, Y_i \rangle = \langle U_i, Y \rangle = 0,$$

$$\langle U_i, x_j \rangle = -G_{ij},$$

$$U_{,ij} = -\sum A_{ij}^k U_k - B_{ij} U,$$

$$\Delta U = -nL_1U.$$

于是有

$$G_{ij} = \langle U, x_{,ij}\rangle = -\langle U_{,i}, x_j\rangle = -\langle U_j, x_i\rangle,$$
$$A_{ijk} = \langle U, x_{,ijk}\rangle = \langle U_{,ij}, x_k\rangle = -\langle U_k, x_{,ij}\rangle,$$
$$B_{ij} = \langle U_i, Y_j\rangle = \langle U_j, Y_i\rangle.$$

在局部坐标系下仍然有

$$\sum G^{ij}A_{ijk} = 0,$$

$$A_{ijk,l} - A_{ijl,k} = \frac{1}{2}(G_{ik}B_{jl} + G_{jk}B_{il} - G_{il}B_{jk} - G_{jl}B_{ik}),$$

$$B_{ik,j} - B_{ij,k} = \sum(A_{ik}^{l}B_{jl} - A_{ij}^{l}B_{lk}),$$

$$R_{ijkl} = \sum(A_{il}^{m}A_{mjk} - A_{ik}^{m}A_{mjl})$$
$$+ \frac{1}{2}(G_{ik}B_{jl} + G_{jl}B_{ik} - G_{il}B_{jk} - G_{jk}B_{il}),$$

$$\sum A_{ij,l}^{l} = \frac{n}{2}(L_1G_{ij} - B_{ij}),$$

$$R_{ij} = \sum A_{il}^{k}A_{kj}^{l} + \frac{n}{2}L_1G_{ij} + \frac{n-2}{2}B_{ij},$$

$$\sum B_{i}^{k}{}_{,k} = n(L_1)_{,i} + \sum A_{ij}^{k}B_{k}^{j},$$

$$\chi = J + L_1.$$

设 $p(x) = \langle U, b - x\rangle$ 为 M 关于常向量 b 的仿射支撑函数，则

$$p_{,ij} = \langle U_{,ij}, b - x\rangle + G_{ij},$$
$$\Delta p = -nL_1p + n.$$

李奇恒等式 设 T_i、T_i^k、T_{ij}^k、… 是 M 上的光滑张量场，它们的二阶协变微商满足

$$T_{i,kl} - T_{i,lk} = \sum T_j R_{ikl}^{j},$$

$$T_i^k{}_{,lm} - T_i^k{}_{,ml} = \sum T_j^k R_{ilm}^{j} - \sum T_i^j R_{jlm}^{k},$$

$$T^k_{ij,st}-T^k_{ij,ts}=\sum T^l_{ij}R^k_{lst}+\sum T^k_{il}R^l_{jst}-\sum T^k_{lj}R^l_{ist}$$

特别，在正交标架场下，A_{ijk} 的二阶协变微商满足

$$A_{ijk,st}-A_{ijk,ts}=\sum R_{list}A_{ljk}+\sum R_{ljst}A_{ilk}+\sum R_{lkst}A_{ijl}$$

§10　相对微分几何介绍

10.1　引言

在我们前面讨论的仿射微分几何中，A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面 M 有唯一确定的仿射法向量场 Y，它在 A^{n+1} 中的幺模仿射变换下不变。除此之外，Y 在每点的微分还落在 M 在该点的切空间中。回忆一下欧氏空间的微分几何，欧氏空间的超曲面的单位正交法向量场也有这一性质。仿射微分几何和欧氏微分几何是两种不同的几何，但是作为两种几何范畴下的超曲面的法向量场，却有下面共同的性质：

(1)　横截于 M；

(2)　其每点的微分落在 M 在该点的切空间中。

自然想到把法向量场作一些推广，考虑 M 上仅具有性质(1)和(2)的向量场。我们把 A^{n+1} 中超曲面 M 上的具有性质(1)和(2)的向量场称为 M 上的相对法向量场。粗略地说，相对微分几何就是以任意的相对法向量场替代仿射法向量场，照着仿射微分几何的方式方法建立起来的一种微分几何学。在 M 上取定一个相对法向量场，也称给定了 M 一个法化(normalization)。对 M 以不同的法化，一般来说对应不同的几何、我们前面讨论的仿射微分几何所对应的法化称为等积仿射法化(epuiaffine　normalization)。

如果能够选择 A^{n+1} 的坐标原点，使 M 的位置向量 x 与 M 横截，则 x 具有上面的性质(1)和(2)。因而可以取 x 作为 M 的相对法向

量场。它所对应的法化称为中心仿射法化，所对应的几何称为中心仿射微分几何。后面我们将作介绍。

10.2　相对微分几何

设 $x: M \to A^{n+1}$ 为光滑的超曲面浸入，Y 是 M 上的相对法向量场。沿着 M 选取标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_n, Y\}$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in T_x M$。由 Y 的性质我们有

$$[e_1, e_2, \cdots e_n, dY] = 0$$

设 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^{n+1}$ 为对偶标架场，则有

$$dx = \sum \omega^i e_i, \quad \omega^{n+1} = 0,$$

$$de_i = \sum \omega_i^j e_j + \omega_i^{n+1} Y,$$

$$de_{n+1} = \sum \omega_{n+1}^j e_j, \quad e_{n+1} = Y,$$

$$d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{1}$$

$$d\omega_i^j = \sum \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^j, \tag{2}$$

$$d\omega_{n+1}^i = \sum \omega_{n+1}^k \wedge \omega_k^i, \tag{3}$$

$$\sum \omega^i \wedge \omega_i^{n+1} = 0, \tag{4}$$

$$\sum \omega_{n+1}^i \wedge \omega_i^{n+1} = 0. \tag{5}$$

从(4)有

$$\omega_i^{n+1} = \sum h_{ij} \omega^j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \tag{6}$$

如果(h_{ij}) 非退化，可以用它在 M 上定义一个伪黎曼度量

$$G = \sum h_{ij} \omega^i \omega^j \tag{7}$$

如果 M 是局部严格凸的，可以选择 Y 的方向使(h_{ij})正定，此时 G 是 M 上的正定黎曼度量。这里的度量不同于仿射微分几何中的 Blaschke 度量，后者与法向量场的选取无关，而且是幺模仿射不变

的。这里的度量 G 不具有这些性质，它是在 Y 取定了以后确定的。G 被称为 M 上的相对度量。

尽管 G 依赖于 Y 的选取，但它与 M 上的标架场 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的选取无关。因此我们可以选择 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使得 $h_{ij} = \delta_{ij}$，即

$$\omega_i^{n+1} = \omega^i, \tag{8}$$

于是外微分上式得

$$d\omega^i = \sum \omega_k^i \wedge \omega_k^{n+1} = \sum \omega_k^i \wedge \omega^k. \tag{9}$$

(1)和(9)两式产生

$$d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \frac{1}{2}(\omega_j^i - \omega_i^j). \tag{10}$$

因为$\frac{1}{2}(\omega_j^i - \omega_i^j)$反称，以及 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$ 是关于 G 的单位正交余标架场，根据黎曼几何的基本定理，(10) 表明相对度量 G 的 Levi-Civita 连络形式 $\tilde{\omega}_i^j$ 为

$$\tilde{\omega}_i^j = \frac{1}{2}(\omega_i^j - \omega_j^i). \tag{11}$$

类似于仿射微分几何，定义

$$\sum A_{ik}^j \omega^k = \omega_i^j - \tilde{\omega}_i^j = \frac{1}{2}(\omega_i^j + \omega_j^i), \tag{12}$$

$$A_{ijk} = \sum h_{jl} A_{ik}^l, \tag{13}$$

它同样满足

$$A_{ijk} = A_{jik} = A_{ikj}. \tag{14}$$

但反极关系

$$\sum h^{ij} A_{ijk} = 0 \tag{15}$$

不必成立，其中(h^{ij}) 为(h_{ij}) 的逆。同样，分别称

$$A = \sum A_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k, \tag{16}$$

$$J = \frac{1}{n(n-1)}\sum h^{il}h^{jm}h^{kn}A_{ijk}A_{lmn} \tag{17}$$

为 **Fubini-pick 形式和 Pick 不变量。**

从(5)我们有

$$\omega_{n+1}^{i} = -\sum l^{ij}\omega_{j}^{n+1} = -\sum l^{ij}h_{jk}\omega^{k}. \tag{18}$$

二次微分式

$$-\sum \omega_{n+1}^{i}\omega_{i}^{n+1} = \sum l^{ij}h_{ik}h_{jl}\omega^{k}\omega^{l} \tag{19}$$

关于相对度量 G 的特征根，即矩阵$(l^{ij}h_{jk})$ 的特征根，称为 M 的**相对主曲率**，记为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。类似地，称

$$L_r = \frac{1}{\binom{r}{n}}\sum_{i_1<\cdots<i_r}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r},\quad r=1,2,\cdots,n \tag{20}$$

为 M 的**第 r 阶相对平均曲率**。同样可以计算相对度量的黎曼曲率张量、李奇曲率和标量曲率，在正交标架场下，它们分别为

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = &\sum (A_{iml}A_{jmk} - A_{imk}A_{jml}) \\ &+ \frac{1}{2}(\delta_{ik}l_{jl} + \delta_{jl}l_{ik} - \delta_{il}l_{jk} - \delta_{jk}l_{il}), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} R_{ik} = &\sum (A_{iml}A_{mlk} - A_{imk}A_{lml}) \\ &+ \frac{n}{2}L_1\delta_{ik} + \frac{n-2}{2}l_{ik}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$R = n(n-1)(J+L_1) - \sum_{i,j,k} A_{iik}A_{jjk}, \tag{23}$$

式中 $l_{ij} = \sum \delta_{ik}\delta_{jl}l^{kl} = l^{ij}$。

向量场

$$v = \frac{1}{n}\sum h^{ij}A_{ij}^{k}e_k \tag{24}$$

被称为 Tschebyschew 向量场。等积仿射微分几何中的 Tschebyschew 向量场为零。象在§7中一样，可以唯一确定一个余法矢量场 U，满足

$$\langle U,Y\rangle = 1,\quad \langle U,v\rangle = 0,\ \forall\, v \in T_xM.$$

U 被称为**相对余法矢量场**。与 §7 中类似地计算可得

$$\Delta U = -L_1 nU - \sum h^{ij}A_{ij}{}^{k}U_{,k} \tag{25}$$

如果 Y^* 是 M 上另一个相对法向量场，它对应的相对余法向量为 U^*，可以证明，存在 M 上的光滑函数 $\tau > 0$，使

$$U^* = \tau U, \tag{26}$$

并且相对度量间有关系

$$G^* = \tau G. \tag{27}$$

类似地，称 M 上的函数

$$p(x) = \langle U, b - x\rangle \qquad x \in M \tag{28}$$

为**相对支撑函数**，式中 b 为 A^{n+1} 中的任意常向量。$p(x)$ 关于相对度量 G 的拉普拉斯为

$$\Delta p = -nL_1 p - \sum h^{ij}A^{k}_{ij}p_k + n \tag{29}$$

10.3　中心仿射微分几何

在引言中我们已经提到，如果能选择 A^{n+1} 的坐标原点，使 M 的位置矢量 x 横截于 M，就可以对 M 取中心法化，即以 x 或者 $-x$ 为 M 的相对法向量场。下面我们将证明，x 确定的相对度量 G 在保持原点不变的任意仿射变换下不变，所以中心法化所对应的几何被称为中心仿射微分几何。

我们仅仅讨论 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面。沿着 M 选择局部标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{n+1} = x\}$，坐标原点可能在曲面凸的一侧，也可能在凹的一侧。如果在凹的一侧，我们选择 $e_{n+1} = -x$。总之，

要使e_{n+1}所确定的相对度量G正定。下面我们在$e_{n+1}=x$下讨论。我们知道G与M上的标架场$e_1,e_2,\cdots,e_n$的选取无关，我们证明它还在A^{n+1}中保持原点不变的仿射变换下不变。事实上，设

$$\bar{x}^A=\sum a_B^A x^B,\qquad A=1,2,\cdots,n+1$$

是保持原点不变的仿射变换，则

$$d\bar{x}^A=\sum a_B^A e_i^B\omega^i,$$

式中e_i^B为e_i的第B个分量。由于G与$\bar{M}$上的标架场的选取无关，因而与$\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^n$的选取也无关。由上式，我们可以选$\omega^1,\cdots,\omega^n$为$\bar{M}$上的余标架场，其对偶标架场记为$\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n$，则

$$\bar{e}_i^A=\sum a_B^A e_i^B,$$

$$d\,\bar{e}_i^A=\sum a_B^A e_j^B\omega_i^j+\sum a_B^A e_{n+1}^B\omega_i^{n+1}$$

$$=\sum\omega_i^j\,\bar{e}_j^A+\omega_i^{n+1}\bar{x}^A.$$

因此在$\bar{M}$上

$$\bar{\omega}_i^{n+1}=\omega_i^{n+1}=\sum h_{ij}\omega^j,$$

$$\bar{G}=\sum\bar{\omega}_i^{n+1}\bar{\omega}^i=\sum\omega_i^{n+1}\omega^i=\sum h_{ij}\omega^i\omega^j=G.$$

G被称为M的**中心仿射度量**。

我们发现

$$K=\frac{\det(h_{ij})}{[e_1,\cdots,e_n,x]^2}\tag{30}$$

与标架场的选取无关。令$\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n$是另一标架，两个标架间的变换为

$$\bar{e}_i=\sum c_i^j e_j,$$

则

$$\bar{\omega}_i^{n+1}=\frac{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n,d\bar{e}_i]}{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n,x]}$$

$$=\frac{\sum c_i^j[e_1,\cdots,e_n,de_j]}{[e_1,\cdots,e_n,x]}=\sum c_i^j\omega_j^{n+1}$$

因此有

$$\bar{h}_{ij}=\sum c_i^k c_j^l h_{kl},$$

$$\bar{K}=\frac{\det(\bar{h}_{ij})}{[\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n,x]^2}=\frac{c^2\det(h_{ij})}{c^2[e_1,\cdots,e_n,x]^2}=K,$$

式中 $c=\det(c_i^j)$。

下面计算 x 的拉普拉斯 Δx。选标架场 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,使 $h_{ij}=\delta_{ij}$,则

$$\omega_i^{n+1}=\omega^i=\omega_{n+1}^i. \tag{31}$$

x 关于中心仿射度量 G 的共变微商为

$$x_{,i}=e_i,$$

$$x_{,ij}=\sum A_{ijk}e_k+\delta_{ij}x, \tag{32}$$

其中 A_{ijk} 由(12)和(13)定义。从§4中的(6)和上式得

$$\Delta x=\sum_{j,k}A_{jjk}e_k+nx. \tag{33}$$

由于

$$\begin{aligned}\sum A_{jjk}\omega^k&=\omega_1^1+\omega_2^2+\cdots+\omega_n^n\\&=d\log[e_1,\cdots,e_n,x]=-\frac{1}{2}d\log K,\end{aligned} \tag{34}$$

把(34)代入(33)得

$$\Delta x=-\frac{1}{2}\sum(\log K)_{,i}e_i+nx. \tag{35}$$

类似地,中心仿射度量的黎曼曲率张量、李奇曲率、标量曲率分别为

$$R_{ijkl}=\sum(A_{iml}A_{jmk}-A_{imk}A_{jml})+(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl}), \tag{36}$$

$$R_{ik}=\sum(A_{iml}A_{mlk}+\frac{1}{2}A_{ikm}(\log K)_{,m})-(n-1)\delta_{ik}, \tag{37}$$

$$R = n(n-1)J - n(n-1) - \frac{1}{4}\sum((\log K)_{,m})^2. \tag{38}$$

Tschebyschew 向量场为

$$v = -\frac{1}{2n}\sum(\log K)_{,i}e_i = -\frac{1}{2n}\mathrm{grad}(\log K). \tag{39}$$

中心仿射余法矢 U 满足

$$\langle U,x\rangle = 1,\quad \langle U,Z\rangle = 0 \quad \forall\, Z\in T_xM, \tag{40}$$

$$\langle U_{,i},x\rangle = 0,\quad \langle U_{,i},e_j\rangle = -h_{ij}, \tag{41}$$

$$\Delta U = nU + \frac{1}{2}\sum(\log K)_{,i}U_{i}. \tag{42}$$

由于 $e_{n+1}=x$,所以 $\omega^i_{n+1}=\omega^i=\delta_{ij}\omega^j$,所以中心仿射主曲率 λ_1、λ_2、…、λ_n 为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=-1. \tag{43}$$

如果 A^{n+1} 的坐标原点在 M 的凹的一侧,这时 $e_{n+1}=-x$,上述有些公式要稍微变动一下,如:

$$\omega^i_{n+1} = -\omega^i, \tag{31'}$$

$$x_{,ij} = \sum A_{ijk}e_k - \delta_{ij}x, \tag{32'}$$

$$\Delta x = -\frac{1}{2}\sum(\log K)_{,i}e_i - nx, \tag{35'}$$

$$R_{ijkl} = \sum(A_{iml}A_{jmk} - A_{imk}A_{jml}) + (\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \tag{36'}$$

$$R_{ij} = \sum\left(A_{iml}A_{mlj} + \frac{1}{2}A_{imj}(\log K)_{,m}\right) + (n-1)\delta_{ij}, \tag{37'}$$

$$R = n(n-1)J + n(n-1) - \frac{1}{4}\sum((\log K)_{,i})^2, \tag{38'}$$

$$\langle U, -x\rangle = 1, \tag{40}$$

$$\Delta U = -nU + \frac{1}{2}\sum(\log K)_{,i}U_i, \tag{42'}$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1 \tag{43'}$$

第二章　完备的仿射球

最近30年来，仿射微分几何的研究，特别是整体仿射微分几何的研究取得了辉煌的成就。这主要表现在完成了对完备的仿射球的分类。E. Calabi、丘成桐、郑绍远、A. V. Pogorelov、T. Sasaki等人在这方面作出了最重要的贡献。这一章我们专门介绍完备的仿射球的分类问题。

§1　仿射球的定义

1.1　仿射球的定义

在第一章的§8中，我们计算了二次曲面的仿射法矢和仿射主曲率。我们看到，椭圆抛物面的所有仿射法线互相平行，其仿射主曲率都等于零；椭球面的所有仿射法线相交于曲面凹的一侧的一点，其仿射主曲率都相等，且等于一个正常数；双曲面的所有仿射法线相交于曲面凸的一侧的一点，其仿射主曲率也都相等，且等于一个负常数。具有以上性质的曲面还很多，它们是欧氏空间中的超平面和超球面的仿射类似。下面我们给出仿射球的定义。

定义 1.1　A^{n+1} 中的一个局部严格凸的超曲面被称为一个仿射超球面，简称为仿射球，如果它的所有仿射法线相交于一点或者互相平行。

一个仿射球被称为椭圆型的仿射球，如果它的仿射法线的交点在曲面凹的一侧；一个仿射球被称为双曲型的仿射球，如果它的仿射法线的交点在曲面凸的一侧；一个仿射球被称为抛物型的，如果它的仿射法线互相平行。

注记　有时也把抛物型的仿射球称为虚(improper)仿射球，而把椭圆型和双曲型的仿射球称为真(proper)仿射球。

真仿射球的仿射法线的交点称为仿射球的仿射中心。

下面我们用仿射主曲率给出仿射球的一个刻画。

定理 1.1　设 M 是 A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面，λ_1、λ_2、…、λ_n 是它的仿射主曲率，则

1) M 是抛物型的仿射球，当且仅当在整个 M 上，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0;$$

2) M 是椭圆型的仿射球，当且仅当在整个 M 上，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \text{正常数};$$

3) M 是双曲型的仿射球，当且仅当在整个 M 上，

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \text{负常数}。$$

证明　1) 在 M 上选取幺模仿射标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $G_{ij} = \delta_{ij}$，e_{n+1} 沿着仿射法线方向。若 M 为抛物型的仿射球，则

$$e_{n+1} = Y = f\eta,$$

其中 η 是一固定矢量，f 是 M 上的光滑函数。由于

$$de_{n+1} = \sum \omega_{n+1}^i e_i = df\eta,$$

可知

$$df = 0, \ \omega_{n+1}^i = 0.$$

从而在 M 上 f=常数，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$。

反之，若在整个 M 上有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$，则推出

$$\omega_{n+1}^i = 0, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

易知

$$e_{n+1}=Y=\text{常矢},$$

即 M 为抛物型仿射球。

2)和 3)　按上面的方法选择标架场，作 A^{n+1} 中的幺模仿射变换，使原点在 M 的仿射中心。于是有

$$e_{n+1}=fx,$$

式中 f 为 M 上的处处非零的光滑函数，x 为 M 的位置矢量。因此有

$$de_{n+1}=\sum\omega_{n+1}^i e_i=dfx+f\sum\omega^i e_i.$$

从而可知

$$df=0,\ \omega_{n+1}^i=f\omega^i.$$

由此推出

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=-f=\text{常数}\neq 0,$$

即是

$$Y=-L_1x.$$

反之，若 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=-f=$常数$\neq 0$，则

$$de_{n+1}=\sum\omega_{n+1}^i e_i=f\sum\omega^i e_i=fdx.$$

从面

$$\frac{e_{n+1}}{f}-x=\text{常矢},$$

因此所有仿射法线交于一点。容易看出，当 $-f>0$ 时交点在曲面凹的一侧，此时 M 为椭圆型仿射球；当 $-f<0$ 时，交点在曲面凸的一侧，此时 M 为双曲型仿射球。证毕。

1.2　仿射球的方程

下面我们导出仿射球所满足的偏微分方程。我们在 R^{n+1} 中考虑。设 M 是一个抛物型的仿射球，经过适当的幺模仿射变换，可以

假定它的仿射法矢为

$$e_{n+1}=(0,\cdots,0,1). \tag{1}$$

由于 e_{n+1} 与 M 横截，M 可以用下面的方程表示：

$$x^{n+1}=f(x^1,x^2,\cdots,x^n). \tag{2}$$

幺模仿射标架场取为

$$\left.\begin{aligned} e_1&=(1,0,\cdots,0,\frac{\partial f}{\partial x^1}),\\ e_2&=(0,1,\cdots,0,\frac{\partial f}{\partial x^2}),\\ &\cdots\cdots\\ e_n&=(0,\cdots,0,1,\frac{\partial f}{\partial x^n}),\\ e_{n+1}&=(0,0,\cdots,0,1). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

容易算得

$$h_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j},\qquad H=\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right). \tag{4}$$

由

$$Y=H^{\frac{1}{n+2}}e_{n+1}=e_{n+1},$$

可知

$$H=1, \tag{5}$$

即

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)=1. \tag{6}$$

反之，设 M 局部上由 $x^{n+1}=f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$表示。若 f 满足(6)，仍取上面的标架场，我们有 $d\log H=0$，$de_{n+1}=0$，因此 $\omega_{n+1}^{n+1}+\frac{1}{n+2}d\log H=0$. 根据第一章§4中的命题4.1，$e_{n+1}=(0,\cdots,0,1)$是 M 的仿射法矢，因此 M 是抛物型仿射球。

下面我们考虑椭圆型和双曲型仿射球。设 M 局部上由一严格

凸的函数表示：

$$x^{n+1}=f(x^1,x^2,\cdots,x^n),\ (x^1,x^2,\cdots,x^n)\in D\subset A^n$$

由 f 的严格凸性推出 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)$ 是正定的。

考虑 D 上的映射

$$F:D\to R^n, \tag{7}$$

$$(x^1,x^2,\cdots,x^n)\to(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n), \tag{7}$$

$$\xi_i=\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

容易算得 F 的雅可比行列式为

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)>0,$$

由此可知 F 是局部微分同胚。设 $O\subset D$ 是一个开区域，且 O 与 $F(O)$ 微分同胚。我们可以把 $F(O)$ 作为 M 的参数区域，即可以把 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 作为 M 的参数。在 $\tilde{O}=F(O)$ 上定义函数 u 为

$$\begin{aligned}&u(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\sum x^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^n)-f(x^1,\cdots,x^n)\\&\xi_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^n),\ i=1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{9}$$

定义 1.2　由(7)和(8)定义的映射称为 Legendre 变换，称 $\tilde{D}=F(D)$ 为 D 关于 f 的 Legendre 变换域，由(9)定义的函数 u 称为 f 的 Legecdre 变换函数。

当 D 是凸域时，我们有下面的引理。

引理 1.1　设 $D\subset R^n$ 是一个凸区域，f 是 D 上的凸函数，F 是由(7)和(8)定义的 Legendre 变换，设 x、y 是 D 中不同的两点，ξ、η 是它们在 F 下的像点，则

$$(y-x)\cdot(\eta-\xi)>0, \tag{10}$$

式中“$\cdot$”表示 R^n 中的典型内积。

证明 令

$$G(t)=f(ty+(1-t)x), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

对 $G(t)$ 关于 t 求导，则有

$$G'(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}f(ty+(1-t)x)\right](y^i-x^i),$$

$$G''(t)=\sum\left[\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}f(ty+(1-t)x)\right](y^i-x^i)(y^j-x^j).$$

由于 f 是严格凸的，易知 $G''(t)>0$，从而 $G'(t)$ 是单调增加函数，因此 $G'(1)>G'(0)$，即

$$\sum\eta_i(y^i-x^i)>\sum\xi_i(y^i-x^i).$$

从而(10)成立。证毕。

引理 1.1 表明，当 D 是凸域时，$F:D\to F(D)$ 是微分同胚。

从(9)我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial\xi_i}=-\sum\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\xi_i}+x^i+\sum\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\xi_i}=x^i, \tag{11}$$

因此，当使用新参数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 时，M 可以表示为

$$x=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\frac{\partial u}{\partial\xi_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n},-u+\sum\xi_i\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\right) \tag{12}$$

利用公式

$$h_{ij}=\left[\frac{\partial x}{\partial\xi_1},\frac{\partial x}{\partial\xi_2},\cdots,\frac{\partial x}{\partial\xi_n},\frac{\partial^2 x}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right], \tag{13}$$

直接计算可得

$$h_{ij}=\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k\partial\xi_l}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}. \tag{14}$$

由于 $\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}=\dfrac{\partial x^i}{\partial\xi_j}$ 可知 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)$ 与 $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)$ 互逆，因此 $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)$ 是正定矩阵。

由此得到

$$H = \left(\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)\right)^{n+1}. \tag{15}$$

因此，M 的 Blaschke 度量为

$$G_{ij} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \tag{16}$$

式中

$$\rho = \left(\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)\right)^{\frac{1}{n+2}}. \tag{17}$$

从(16)我们得到

$$\sqrt{G} = (\det(G_{ij}))^{\frac{1}{2}} = \rho^{n+1}.$$

由第一章 § 4 中的(7)，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta x^1 &= \sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(G^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)\right) \\
&= \rho^{-n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\rho^n) = n\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1}, \\
\Delta x^2 &= n\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_2}, \\
&\cdots\cdots \\
\Delta x^n &= n\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_n}, \\
\Delta x^{n+1} &= \sum \rho^{-n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\rho^n \xi_i) = n\rho^{-1} + n\rho^{-2} \sum \xi_i \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i}.
\end{aligned} \tag{18}$$

因此，M 的仿射法矢为

$$Y = \left(\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_1}, \cdots, \rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_n}, \rho^{-1} + \rho^{-2} \sum \xi_i \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i}\right). \tag{19}$$

不难看出，要使 $Y = -L_1 x$ 的充要条件为

$$\rho = \frac{1}{L_1 u} \tag{20}$$

或者

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)=(L_1u)^{-n-2}. \tag{21}$$

我们已经证明了下面的定理。

定理 1.2　设 M 是 A^{n+1} 中的浸入超曲面，它局部上由一个严格凸函数 $x^{n+1}=f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$表示，则

a)　M 是一个仿射中心在原点，仿射平均曲率为 L_1 的真仿射球的充分必要条件是由(10)定义的 f 的 Legendre 变换函数 u 满足微分方程(21)。

b)　M 是一个以$(0,\cdots,0,1)$为仿射法向量的抛物型仿射球的充分必要条件是，f 满足微分方程(6)。

下面我们给出一个重要的例子。

考虑由方程

$$x^1x^2\cdots x^{n+1}=C\ ,\text{C 为正常数} \tag{22}$$

定义的曲面，它有多个连通分支，我们考虑其中一个连通分支

$$x^{n+1}=\frac{C}{x^1x^2\cdots x^n},\ x^1>0,x^2>0,\cdots,x^n>0.$$

不难看出它定义了一个局部严格凸的超曲面。令

$$\xi_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}=-\frac{f}{x^i}, \tag{23}$$

此处 $f(x^1,x^2,\cdots,x^n)=\dfrac{C}{x^1x^2\cdots x^n}$。由(9)式，$f$ 的 Legendre 变换函数为

$$\begin{aligned}u(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)&=-(n+1)f\\&=-(n+1)C^{\frac{1}{n+1}}[(-1)^n\xi_1\xi_2\cdots\xi_n]^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned} \tag{24}$$

直接计算可得

$$\frac{\partial u}{\partial\xi_i}=\frac{u}{(n+1)\xi_i}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}=\frac{u}{(n+1)^2\xi_i\xi_j}-\frac{u}{(n+1)\xi_i^2}\delta_{ij}\quad, \tag{26}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)=(L_1 u)^{-n-2},\tag{27}$$

其中

$$L_1=-(n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}}C^{-\frac{2}{n+2}}<0.\tag{28}$$

因此，$x^{n+1}=\dfrac{C}{x^1x^2\cdots x^n}$ 是一双曲型仿射球。但它不是二次超曲面。

1.3　一个合成公式

E. Calabi 发现了一个合成公式((参看[Ca-3])，利用这个公式，人们可以从两个已知的双曲型仿射球构造出一个新的双曲型仿射球。

设 $x':M'\to A^{p+1}$ 和 $x'':M''\to A^{q+1}$ 是两个仿射中心在原点的双曲型仿射球，它们的 Blaschke 度量和仿射平均曲率分别为 G'、G''、和 L'_1、L''_1.　令 $M=M'\times R\times M''$。Calabi 构造的新的双曲型仿射球如下：

$$x:M\to A^{p+q+2}$$

$$x=\left(c'x'\exp\frac{-t}{p+1},C''x''\exp\frac{t}{q+1}\right)\tag{29}$$

其中 t 是 R 的典型参数，c'、c''是任意正常数，$x'=(x^{1\prime},x^{2\prime},\cdots,x^{p+1\prime})$；$x''=(x^{1''},x^{2''},\cdots,x^{q+1''})$.

下面我们证明 $x(M)$确实是一个双曲型仿射球，并计算它的 Blaschke 度量 G 和仿射平均曲率 L_1。在 M'上选局部坐标系 $u^1,u^2,\cdots,u^p$，在 M''上选局部坐标系 $v^1,v^2,\cdots,v^q$，则 $u^1,u^2,\cdots,u^p,t,v^1,v^2,\cdots v^q$ 可作为 M 上的局部坐标系。令 $u^{p+2}=v^1,\cdots,u^{p+q+1}=v^q$。约定指标的取值范围：

$$1\leqslant A,B,\cdots\leqslant p+q+1,$$
$$1\leqslant i,j,\cdots\leqslant p,\ p+2\leqslant\alpha,\beta,\cdots\leqslant p+q+1.\tag{30}$$

令

$$\left[\frac{\partial x'}{\partial u^1},\frac{\partial x'}{\partial u^2},\cdots,\frac{\partial x'}{\partial u^p},\frac{\partial^2 x'}{\partial u^i\partial u^j}\right]=h'_{ij},$$

$$\det(h'_{ij}) = H',$$

$$\left[\frac{\partial x''}{\partial u^{p+2}}, \frac{\partial x''}{\partial u^{p+3}}, \cdots, \frac{\partial x''}{\partial u^{p+q+1}}, \frac{\partial^2 x''}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\right] = h''_{\alpha\beta}$$

$$\det(h''_{\alpha\beta}) = H''.$$

$x'(M')$和$x''(M'')$的 Blaschke 度量分别为

$$G'_{ij} = (H')^{\frac{-1}{p+2}} h'_{ij}, \qquad G''_{\alpha\beta} = (H'')^{\frac{-1}{q+2}} h''_{\alpha\beta}.$$

显然

$$\frac{\partial x}{\partial u^i} = \left(c' \frac{\partial x'}{\partial u^i} \exp\frac{-t}{p+1}, 0\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{-c'}{p+1} x' \exp\frac{-t}{p+1}, \frac{c''}{q+1} x'' \exp\frac{t}{q+1}\right),$$

$$\frac{\partial x}{\partial u^\alpha} = \left(0, c'' \frac{\partial x''}{\partial u^\alpha} \exp\frac{t}{q+1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = \left(c' \exp\frac{-t}{p+1} \frac{\partial^2 x'}{\partial u^i \partial u^j}, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial t} = \left(\frac{-c'}{p+1} \exp\frac{-t}{p+1} \frac{\partial x'}{\partial u^i}, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{c'}{(p+1)^2} x' \exp\frac{-t}{p+1}, \frac{c''}{(q+1)^2} x'' \exp\frac{t}{q+1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial t} = \left(0, \frac{c''}{q+1} \exp\frac{t}{q+1} \frac{\partial x''}{\partial u^\alpha}\right);$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left(0, c'' \exp\frac{t}{q+1} \frac{\partial^2 x''}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\right),$$

$$h_{AB} = \left[\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial u^{p+q+1}}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^A \partial u^B}\right].$$

由以上公式可得

$$h_{ij} = -\frac{(c')^{p+1}(c'')^{q+1}}{q+1}\left[\frac{\partial x''}{\partial v^1}, \cdots, \frac{\partial x''}{\partial v^q}, x''\right] h'_{ij}, \tag{31}$$

$$h_{p+1,p+1} = -(c')^{p+1}(c'')^{q+1} \frac{(p+q+2)}{(p+1)^2(q+1)^2}\left[\frac{\partial x'}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial x'}{\partial u^p}, x'\right]$$

$$\left[\frac{\partial x''}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial x''}{\partial v^q},x''\right]\quad, \tag{32}$$

$$h_{\alpha\beta}=-\frac{(c')^{p+1}(c'')^{q+1}}{p+1}\left[\frac{\partial x'}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial x'}{\partial u^p},x'\right]h''_{\alpha\beta} \tag{33}$$

$$h_{i\alpha}=0,\quad h_{i,p+1}=0,\quad h_{\alpha,p+1}=0. \tag{34}$$

由于 $x'(M')$、$x''(M'')$是双曲型仿射球，我们有

$$\left[\frac{\partial x'}{\partial u^1},\frac{\partial x'}{\partial u^2},\cdots,\frac{\partial x'}{\partial u^p},x'\right]=-\frac{1}{L'_1}(H')^{\frac{1}{p+2}}\quad, \tag{35}$$

$$\left[\frac{\partial x''}{\partial v^1},\frac{\partial x''}{\partial v^2},\cdots,\frac{\partial x''}{\partial v^q},x''\right]=-\frac{1}{L''_1}(H'')^{\frac{1}{q+2}}, \tag{36}$$

把(35)和(36)代入(31)—(34)得

$$h_{ij}=\frac{(c')^{p+1}(c'')^{q+1}}{L''_1(q+1)}(H'')^{\frac{1}{q+2}}h'_{ij}\quad, \tag{37}$$

$$h_{p+1,p+1}=-\frac{(c')^{p+1}(c'')^{q+1}(q+p+2)}{L'_1L''_1(p+1)^2(q+1)^2}(H')^{\frac{1}{p+2}}(H'')^{\frac{1}{q+2}}, \tag{38}$$

$$h_{\alpha\beta}=-\frac{(c')^{p+1}(c'')^{q+1}}{L'_1(p+1)}(H')^{\frac{1}{p+2}}h''_{\alpha\beta}, \tag{39}$$

$$h_{\alpha,p+1}=0,\ h_{i,p+1}=0,\ h_{i\alpha}=0. \tag{40}$$

可见 $x(M)$是局部严格凸超曲面。我们改变 $x(M)$的定向，使(h_{AB})正定，不难算出 $x(M)$的 Blaschke 度量 G 为

$$\begin{aligned}G=C\{(p+1)(-L'_1)G'\oplus\frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)}dt^2\\ \oplus(q+1)(-L''_1)G''\}\end{aligned} \tag{41}$$

其中 C 是由下式定义的常数：

$$C^{p+q+3}=\frac{c'^{2p+2}c''^{2q+2}}{(p+q+2)(p+1)^{p+1}(q+1)^{q+1}(-L'_1)^{p+2}(-L''_1)^{q+2}}. \tag{42}$$

$X(M)$的仿射法矢 Y 为

$$(p+q+1)Y=\Delta x=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum\frac{\partial}{\partial u^A}\left(G^{AB}\sqrt{G}\,\frac{\partial x}{\partial u^B}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{C}\left(\frac{c'\Delta_0'x'}{(p+1)(-L'_1)}\exp\frac{-t}{(p+1)}\right.\\
&\quad+\frac{c'(q+1)x'}{(p+1)(p+q+2)}\exp\frac{-t}{p+1}\\
&\quad\frac{c''\Delta_0''x''}{(q+1)(-L''_1)}\exp\frac{t}{q+1}\\
&\quad\left.+\frac{c''(p+1)x''}{(q+1)(p+q+2)}\exp\frac{t}{q+1}\right)\\
&=\frac{p+q+1}{C(p+q+2)}x.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

因此 $x(M)$是双曲型仿射球，其仿射平均曲率为

$$
L_1=\frac{-1}{C(p+q+2)}\ .
\tag{44}
$$

如果我们取 $c'=c''=1$，由(42)式知 $x(M)$的仿射平均曲率 L_1 由下式确定：

$$
\begin{aligned}
&(p+q+2)^{p+q+2}(-L_1)^{p+q+3}\\
&=(p+1)^{p+1}(-L'_1)^{p+2}(q+1)^{q+1}(-L''_1)^{q+2}\ .
\end{aligned}
\tag{45}
$$

§2　欧氏完备性与仿射完备性

对于 A^{n+1} 中的非退化的超曲面，可以引入 Blaschke 度量，因而有关于这种度量的完备性概念，我们称这种完备性为**仿射完备性**。此外还有另一种完备性概念，在 A^{n+1} 中引入一种欧氏内积$<,>$，M 作为 A^{n+1} 中的子流形有诱导的黎曼度量，M 按这种诱导度量的完备性称为**欧氏完备性**。

我们首先指出，M 的欧氏完备性与 A^{n+1} 中的欧氏内积的选取

无关，若另取内积≪，≫，设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n+1}$ 和 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n+1}$ 分别是关于这两种内积的标准正交基，设

$$\xi_A = \sum c_A^B \eta_B,\ A = 1,2,\cdots,n+1,$$

$$C = (c_A^B).$$

M 上的两种诱导度量由以下的关系相联系：

$$ds^2 = (dx^1, dx^2, \cdots, dx^{n+1}) \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^{n+1} \end{pmatrix},$$

$$d\bar{s}^2 = \left[C \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^{n+1} \end{pmatrix} \right]^{\tau} C \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= (dx^1, dx^2, \cdots, dx^{n+1}) C^{\tau} C \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^{n+1} \end{pmatrix},$$

式中的 C^{τ} 表示矩阵 C 的转置矩阵。设 $C^{\tau}C$ 的最大和最小特征根分别为 Λ 和 λ，因为 $C^{\tau}C$ 是正定的，所以 Λ 和 λ 是正数，由上面则有

$$\lambda ds^2 \leqslant d\bar{s}^2 \leqslant \Lambda ds^2$$

因此两种内积诱导的完备性是一致的。

以后，我们在 A^{n+1} 中定义内积时总使得这个内积的标准正交基所确定的有向体积为 1。

一般来说，欧氏完备性和仿射完备性是不等价的。下面我们给出 R. Schneider 的一个例子(参看[Schn-1])。

令

$$x^3 = f(x^1, x^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^1} + (x^2)^2\right),$$

$$M = \{(x^1, x^2, f(x^1, x^2)) \mid 0 < x^1 < \infty, -\infty < x^2 < \infty\},$$

这是 A^3 中的一个局部严格凸的曲面，显然它是欧氏完备的。下面我们说明它不是仿射完备的。

M 的 Blaschke 度量为

$$G_{11} = (x^1)^{-\frac{9}{4}}, \qquad G_{12} = 0, \qquad G_{22} = (x^1)^{\frac{5}{4}}.$$

取曲线

$$x^1(t) = t, \quad x^2(t) = 0, \ 1 \leqslant t \leqslant \infty$$

其弧长为

$$L_1 = \int_1^\infty \sqrt{G_{11}(t)}dt = \int_1^\infty t^{-\frac{9}{8}}dt < \infty.$$

这表明 M 按仿射度量不是完备的。

对于仿射球，郑绍远和丘成桐证明了它的欧氏完备性隐含了仿射完备性。下面我们证明这个事实，其证明取材于他们的文章[Chen-Y-2]。

首先对任意凸超曲面导出一个梯度估计。设 M 是 A^{n+1} 中的一个严格凸的超曲面，它局部上由方程

$$x^{n+1} = u(x^1, x^2, \cdots, x^n), \ (x^1, \cdots, x^n) \in \Omega \subset A^n$$

给出。由于凸性，经过一个幺模仿射变换，可以假定 $u \geqslant 0$，并且 M 在点 $P_0 \in M$ 的切空间就是 $A^n = \{x^{n+1} = 0\}$。令 $C > 0$ 是一常数，它使集合

$$\Omega_C = \{(x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \Omega \mid u(x^1, \cdots, x^n) \leqslant C\}$$

是紧致的。令

$$f(x) = \exp\left\{\frac{-m}{C - u(x)}\right\} \frac{\|\nabla u\|^2}{(u(x) + \varepsilon)^p}$$

$$x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in \Omega_C \tag{1}$$

其中 m, p, ε 是待选择的正常数。由于当 x 趋于 Ω_C 的边界点时，$f(x)$ 一致趋于零，因此 $f(x)$ 必在 Ω_C 的内点 x_0 处达到最大值。在 M 上取关于 Blaschke 度量的单位正交标架场 $\{x; e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，再取

$e_{n+1}=Y$。为了书写简便，我们把光滑函数 u、f 关于 Blaschke 度量的协变微商 $u_{,ij}$、$f_{,ij}$、$u_{,ijk}$、$f_{,ijk}$ 分别简写成 u_{ij}、f_{ij}、u_{ijk}、f_{ijk}，等等，在以后的章节中，在不引起混淆时，我们总采用这一记法。在点 x_0 有

$$f_i = 0,\quad i = 1,2,\cdots,n,$$

$$\sum f_{ii} \leqslant 0\ ,$$

即

$$\frac{-mu_i}{(C-u)^2}\sum u_j^2 - \frac{pu_i}{u+\varepsilon}\sum u_j^2 + 2\sum u_j u_{ji} = 0 \qquad (2)$$

$$\left[\frac{-m}{(C-u)^2} - \frac{p}{u+\varepsilon}\right]\Delta u \sum u_j^2 + \left[\frac{-2m}{(C-u)^3} + \frac{p}{(u+\varepsilon)^2}\right]\left(\sum u_j^2\right)^2$$
$$-2\left[\frac{m}{(C-u)^2} + \frac{p}{u+\varepsilon}\right]\sum u_i u_{ij} u_j + 2\sum u_{ij}^2$$
$$+2\sum u_j u_{jii} \leqslant 0\ . \qquad (3)$$

把(2)代入(3)得

$$-\left[\frac{m}{(C-u)^2} + \frac{p}{u+\varepsilon}\right]\Delta u \sum u_j^2 + \left[-\frac{2m}{(C-u)^3} + \frac{p}{(u+\varepsilon)^2}\right]$$
$$\left(\sum u_i^2\right)^2 - \left[\frac{m}{(C-u)^2} + \frac{p}{u+\varepsilon}\right]^2\left(\sum u_i^2\right)^2 + 2\sum u_{ij}^2 + 2\sum u_j u_{jii} \leqslant 0$$
$$(4)$$

下面计算 u_{ij} 和 u_{ijj}。由结构方程有

$$x_{,i} = e_i,$$

$$x_{,ij} = \sum A_{ijk} e_k + \delta_{ij} e_{n+1}, \qquad (5)$$

而 u_{ij} 恰是 $x_{,ij}$ 的第 $n+1$ 个分量。另一方面，由第一章 § 9 末的李奇恒等式得

$$\sum u_j u_{jii} = \sum u_j (\Delta u)_j + \sum R_{ij} u_i u_j \qquad (6)$$

在我们所选的标架场下，易知

$$\Delta x = n e_{n+1}, \qquad de_{n+1} = -\sum B_{ij} w^i e_j$$

$$e_j^{n+1} = u_j,\quad (e_{n+1}^{n+1})_j = -\sum B_{ij}u_i\quad ,$$

其中 e_j^{n+1} 表示 e_j 的第 $n+1$ 个分量。在一固定点我们还可以选标架场使得在这一点，有

$$u_2 = u_3 = \cdots = u_n = 0.$$

于是有

$$\sum u_j(\Delta u)_j = u_1(\Delta u)_1 = nu_1(e_{n+1}^{n+1})_1 = -nB_{11}u_1^2. \qquad (7)$$

把(7)和第一章§9中的(19)代入(6)得

$$\sum u_j u_{jii} = -nB_{11}u_1^2 + \sum_{m,l} A_{1ml}^2 u_1^2 + \frac{n-2}{2}B_{11}u_1^2 + \frac{n}{2}L_1u_1^2\quad , \qquad (8)$$

取(5)的第 $n+1$ 个分量可得

$$\sum_{i,j} u_{ij}^2 = \sum_{i,j}(A_{ij1}u_1 + \frac{\Delta u}{n}\delta_{ij})^2 = \sum_{i,j} A_{ij1}^2 u_1^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n}\quad , \qquad (9)$$

把(9)代入(8)得

$$\sum u_j u_{jii} = \sum_{i,j} u_{ij}^2 + \frac{n}{2}L_1u_1^2 - \frac{n+2}{2}B_{11}u_1^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n}. \qquad (10)$$

利用 Schwartz 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum u_{ij}^2 &\geqslant u_{11}^2 + \sum_{i>1} u_{ii}^2 \geqslant u_{11}^2 + \frac{1}{n-1}(\sum_{i>1} u_{ii})^2 \\ &= \frac{n}{n-1}u_{11}^2 + \frac{(\Delta u)^2}{n-1} - \frac{2u_{11}\Delta u}{n-1} \\ &\geqslant (\frac{n}{n-1} - \delta)u_{11}^2 - \frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}(\Delta u)^2, \end{aligned} \qquad (11)$$

其中 δ 为任意正常数。把(10)和(11)代入(4)得

$$\begin{aligned} 0 \geqslant &-\left[\frac{m}{(C-u)^2} + \frac{p}{u+\varepsilon}\right](\Delta u)u_1^2 + \left[\frac{-2m}{(C-u)^3} + \frac{p}{(u+\varepsilon)^2}\right]u_1^4 \\ &- \left[\frac{m}{(C-u)^2} + \frac{p}{u+\varepsilon}\right]^2 u_1^4 + 4\left(\frac{n}{n-1} - \delta\right)u_{11}^2 \\ &- 4\left[\frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\right](\Delta u)^2 + nL_1u_1^2 - (n+2)B_{11}u_1^2 - \frac{2(\Delta u)^2}{n} \end{aligned}$$

$$\geqslant -\left[\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right](\Delta u)u_1^2+\left[\frac{-2m}{(C-u)^3}+\frac{p}{(u+\varepsilon)^2}\right]u_1^4$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)\left[\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{(u+\varepsilon)}\right]^2u_1^4+nL_1u_1^2$$

$$-(n+2)B_{11}u_1^2-\left[\frac{4-4(n-1)\delta}{\delta(n-1)^2}+\frac{2}{n}\right](\Delta u)^2 \quad. \qquad (12)$$

令 $\delta<\frac{1}{2(n-1)}$, $m=4(n-1)C$, 则

$$\left[\frac{-2m}{(C-u)^2}+\frac{p}{(u+\varepsilon)^2}\right]u_1^4+\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^2u_1^4$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2(n+1)}-\delta\right)\left(\frac{m}{(c-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^2u_1^4.$$

把上式代入(12)得

$$0\geqslant-\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^2|\Delta u|u_1^2+a\left(\frac{m}{(C-u)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^2u_1^4-bu_1^2-q(\Delta u)^2,$$

式中

$$a=\left(\frac{1}{2(n-1)}-\delta\right)=\text{正常数},$$

$$b=\max(0,-nL_1+(n+2)B_{11}),$$

$$q=\frac{4-4(n-1)\delta}{(n+1)^2}+\frac{2}{n}=\text{正常数},$$

或者

$$0\geqslant-u_1^2\left(|\Delta u|+b\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^{-1}\right)+a\left(\frac{m}{(C-u)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)u_1^4-q(\Delta u)^2\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^{-1}.$$

把上式看成关于 u_1^2 的二次不等式，易知 u_1^2 必小于或等于其对应二次方程的大根，即

$$u_1^2\leqslant\left[|\Delta u|+b\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^{-1}\right.$$

$$+\sqrt{\left[|\Delta u|+b\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)^{-1}\right]^2+4aq|\Delta u|^2}$$

$$\left[2a\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)\right]^{-1}.$$

利用 $\sqrt{s^2+t^2}\leqslant|s|+|t|$，从上式得到

$$\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)u_1^2\leqslant a_n\left(|\Delta u|+\frac{b(u+\varepsilon)}{p}\right),$$

式中 a_n 是一个仅仅依赖于 n 的正常数。从而有

$$\left(\frac{m}{(C-u)^2}+\frac{p}{u+\varepsilon}\right)u_1^2(u+\varepsilon)^{1-p}$$

$$\leqslant a_n\left(\frac{|\Delta u|}{(u+\varepsilon)^{p-1}}+\frac{b}{p(u+\varepsilon)^{p-2}}\right) \tag{13}$$

上式是在点 x_0 成立，由于 f 在点 x_0 达到最大值，即对任意的 $x\in\Omega_C$，$f(x)\leqslant f(x_0)$，从而有

$$\exp\left\{\frac{-m}{(C-u)}\right\}\frac{\|\nabla u\|^2}{(u+\varepsilon)^p}\leqslant\left.\frac{\|\nabla u\|^2}{(u+\varepsilon)^p}\right|_{x_0}$$

$$\leqslant\frac{a_n}{p}\left.\left(\frac{|\Delta u|}{(u+\varepsilon)^{p-1}}+\frac{b}{p(u+\varepsilon)^{p-2}}\right)\right|_{x_0}\leqslant\frac{a_n}{p}\left(\sup_{\Omega_c}\left\{\frac{|\Delta u|}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\right\}\right.$$

$$\left.+\sup_{\Omega_c}\left\{\frac{\max(0,(n+2)\Lambda-n\lambda)}{p(u+\varepsilon)^{p-2}}\right\}\right) \tag{14}$$

式中 Λ 和 λ 分别表示 M 的最大和最小仿射主曲率函数，于是我们已经证明了下面的定理：

定理 2.1　（郑绍远，丘成桐）设 M 是定义在 A^n 中的区域 Ω_C 上的非负凸函数 u 的图，其中 $\Omega_C=\{x\,|\,u(x)\leqslant C\}$ 是紧致的，令 Λ 和 λ 分别表示 M 的最大和最小仿射主曲率函数，则对一切的 $\varepsilon>0$，$p>0$，成立

$$\exp\left\{\frac{-\Lambda(n+1)C}{C-u}\right\}\|\nabla u\|^2\leqslant\frac{a_n}{p}(u+\varepsilon)^p\left(\sup_{\Omega_c}\left\{\frac{|\Delta u|}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\right\}\right.$$

$$\left.+\sup_{\Omega_c}\left\{\frac{\max(0,(n+2)\Lambda-n\lambda)}{p(u+\varepsilon)^{p-2}}\right\}\right), \tag{15}$$

其中 α_n 是一个仅仅依赖于 n 的正常数。

推论 假定存在常数 m_1, m_2，使 $|\Delta u| \leqslant m_1 u + m_2$，其中 $m_1 \geqslant 0$，$m_2 \geqslant 0$，并且 $m_2 > (n+2)A - n\lambda$，则存在仅仅依赖于 n, m_1, m_2 的正常数 α，使得对任意的 $x \in \Omega_{\frac{C}{2}}$，

$$\| \nabla u \|^2 \leqslant \alpha (u(x) + 1)^2 \quad . \tag{16}$$

特别，对于以弧长为参数的测地线

$$\sigma : [0, l] \to M_{\frac{C}{2}} = \left\{ (x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) \,|\, x^{n+1} = u(x^1, \cdots, x^n) \leqslant \frac{C}{2} \right\},$$

则其弧长 s 满足

$$s \geqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| \log \frac{u(\sigma(s)) + 1}{u(\sigma(0)) + 1} \right|.$$

证明 在(14)中令 $p=2$。得到

$$\exp\left\{ \frac{-m}{C-u} \right\} \frac{\| \nabla u \|^2}{(u+\varepsilon)^2} \leqslant \frac{\alpha_n}{2} \sup_{\Omega_C} \left\{ \frac{m_1 u + m_2}{u + \varepsilon} + \frac{m_2}{2} \right\}$$

$$\leqslant \frac{\alpha_n}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{\varepsilon} + \frac{m_2}{2} \right) \quad ,$$

取 $\varepsilon = 1$，则有

$$\| \nabla u \|^2 \leqslant \frac{\alpha_n}{4} (2m_1 + 3m_2)(u+1)^2 \exp\left\{ \frac{m}{C-u} \right\}$$

$$\leqslant \frac{\alpha_n}{4} (2m_1 + 3m_2)(u+1)^2 \exp\left\{ \frac{4(n-1)C}{C - \frac{C}{2}} \right\}$$

$$= \alpha (u+1)^2,$$

其中 α 是依赖于 n, m_1, m_2 的正常数。

对于以弧长为参数的测地线，我们取 $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$，因此

$$\left| \frac{du(\sigma(s))}{ds} \right| = |\nabla_{e_1} u(\sigma(s))| \leqslant \| \nabla u \|_{\sigma(s)}.$$

从而

$$\left|\frac{du}{ds}\right| \leqslant \sqrt{a}(u+1).$$

考虑微分方程

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{a}(u+1).$$

它的通解为

$$t = \frac{1}{\sqrt{a}}\log(u+1) + C.$$

由此推出 σ 的弧长 s 满足

$$s \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}}\left|\log\frac{u(\sigma(s))+1}{u(\sigma(0))+1}\right|.$$

证毕

定理 2.2(郑绍远、丘成桐)　设 M 是 A^{n+1} 中的一个仿射球，如果 M 是欧氏完备的，则它也是仿射完备的。

证明　因为 M 是欧氏完备的，由 Hardamard 定理推出 M 或者是封闭的(紧致无边)，或者是定义在 A^n 中开区域 Ω 上的凸函数 u 的图。它是整体凸的，并且是逆紧浸入(proper　immersion)。当 M 是紧致时，结论显然成立。在后一种情形，我们作一幺模仿射变换，使 $u\geqslant 0, u(0)=0, u_i(0)=0$。这时，由严格凸性可推出 v 是逆紧映射，即紧集的原像是紧集。

对于真仿射球，我们有

$$\Delta x = -nL_1(x-v),\quad x\in M \text{ 常矢}$$

式中 v 是常矢；对于虚仿射球，我们有

$$\Delta x = nY = \text{常矢}.$$

这两种情形，都存在常数 $m_1\geqslant 0, m_2>0$ 使

$$|\Delta u| \leqslant m_1 u + m_2$$

并且 $m_2 > (n+2)A - n\lambda$。设 $\sigma(s) = (x^1(s), x^2(s), \cdots, x^n(s),$

$u(x^1(s),\cdots,x^n(s)))$ 是 M 上任意一条测地线，并且 $(x^1(s),\cdots,x^n(s))$ 趋于 Ω 的边界 $\partial\Omega$，由于 u 是逆紧映射，所以 $u(\sigma(s))$ 要趋于无穷大，由定理 2.1 的推论知，σ 的弧长 $s\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}\left|\log\frac{u(\sigma(s))+1}{u(\sigma(o))+1}\right|$，从而 s 趋于无穷大，因此 M 是仿射完备的。证毕。

§ 3　Fubini—Pick 形式的估计

3.1　Pick 不变量的拉普拉斯

设 $x:M\to A^{n+1}$ 是仿射超球面，在 M 上选局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使 e_1、$\cdots$、$e_n\in T_xM$，$e_{n+1}=Y$，$G_{ij}=\delta_{ij}$，由第一章 § 9 中的(9)，仿射球的 Fubini-Pick 形式满足

$$A_{ijk,l}-A_{ijl,k}=0. \tag{1}$$

M 的 Blaschke 度量的黎曼曲率张量为

$$R_{ijkl}=\sum(A_{iml}A_{jmk}-A_{imk}A_{jml})+L_1(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})。 \tag{2}$$

由第一章 § 9 末的李奇恒等式，有

$$A_{ijk,lm}-A_{ijk,ml}=\sum A_{ijr}R_{rklm}+\sum A_{irk}R_{rjlm}+\sum A_{rjk}R_{rilm}。 \tag{3}$$

利用(1)和(3)可得

$$\begin{aligned}\Delta A_{ijk}&=\sum_l A_{ijk,ll}=\sum_l A_{ijl,kl}\\&=\sum_l A_{ijl,lk}+\sum_{l,r}A_{ijr}R_{rlkl}+\sum_{l,r}A_{irl}R_{rjkl}+\sum_{l,r}A_{rjl}R_{rikl}\\&=\sum_{l,r}A_{ijr}R_{rlkl}+\sum_{l,r}A_{irl}R_{rjkl}+\sum_{l,r}A_{rjl}R_{rikl}。\end{aligned} \tag{4}$$

由此可以计算 Pick 不变量的拉普拉斯：

$$\Delta J=\frac{1}{n(n-1)}\Delta\left(\sum A_{ijk}^2\right)=\frac{2}{n(n-1)}\left[\sum A_{ijk,l}^2+\sum A_{ijk}A_{ijk,ll}\right]$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\Big[\sum A_{ijk,l}^2+\sum A_{ijk}A_{ijr}R_{rlkl}$$

$$+\sum A_{ijk}A_{irl}R_{rjkl}+\sum A_{ijk}A_{rjl}R_{rikl}\Big]$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\Big[\sum A_{ijk,l}^2+\sum A_{ijk}A_{ijr}R_{rlkl}$$

$$+\sum(A_{ijk}A_{irl}-A_{ijl}A_{irk})R_{rjkl}\Big]. \tag{5}$$

把(2)代入(5)得

$$\frac{n(n-1)}{2}\Delta J=\sum A_{ijk,l}^2+\sum R_{ir}^2+\sum R_{ijkl}^2-(n+1)RL_1. \tag{6}$$

我们需要下面的引理。

引理 3.1　对任意的 n 维黎曼流形，其黎曼曲率、李奇曲率、标量曲率满足以下不等式：

$$\sum R_{ij}^2\geqslant\frac{1}{n}R^2, \tag{7}$$

$$\sum R_{ijkl}^2\geqslant\frac{2}{n-1}\sum R_{ij}^2. \tag{8}$$

证明　令

$$R'_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{n}R\delta_{ij},$$

则有　　$\sum\limits_i R'_{ii}=0$ 和

$$0\leqslant\sum R'_{ij}R'_{ij}=\sum R_{ij}^2-\frac{1}{n^2}nR^2=\sum R_{ij}^2-\frac{1}{n}R^2$$

这就证明了(7)。

当 $n=2$ 时，(8)是恒等式，以下我们假定 $n\geqslant3$。令

$$C_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}(\delta_{ik}R_{jl}+\delta_{jl}R_{ik}-\delta_{il}R_{jk}-\delta_{jk}R_{il})$$

$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}).$$

C_{ijkl} 被称为 M 的共形曲率张量。不难看出，它的任意两指标的缩并

为零。令

$$R'_{ijkl} = R_{ijkl} - C_{ijkl},$$

则

$$\sum (R'_{ijkl})^2 = \frac{4}{n-2}\sum R_{ij}^2 - \frac{2R^2}{(n-1)(n-2)}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum R_{ijkl}^2 &= \sum (R'_{ijkl})^2 + \sum C_{ijkl}^2 + 2\sum C_{ijkl}R'_{ijkl}\\ &= \sum (R'_{ijkl})^2 + \sum C_{ijkl}^2\\ &\geqslant \sum (R'_{ijkl})^2 \geqslant \frac{4}{n-2}\sum R_{ij}^2 - \frac{2R^2}{(n-1)(n-2)}\\ &\geqslant \frac{2}{n-1}\sum R_{ij}^2.\end{aligned}$$

证毕。

把(7)和(8)代入(6)得

$$\frac{n(n-1)}{2}\Delta J \geqslant \sum A_{ijk,l}^2 + \frac{1}{n}R^2 + \frac{2}{n(n-1)}R^2 - (n+1)RL_1. \tag{9}$$

由第一章§9中的(21),有

$$R = n(n-1)(J+L_1),$$

代入(9)得

$$\frac{n(n-1)}{2}\Delta J \geqslant \sum A_{ijk,l}^2 + n(n-1)(n+1)J(J+L_1). \tag{10}$$

利用公式(10)我们可以证明下面定理。

定理3 设 $x: M\to A^{n+1}$ 是紧致无边的仿射超球面,则 $x(M)$ 是一个椭球。

证明 我们首先证明,对任意紧致无边的凸超曲面,至少存在一点 $x_0\in M$,使在这一点 L_1 为正,设 a 是 A^{n+1} 中的任意常向量,令 $f=\langle U, a\rangle$,此处 U 为 M 的仿射余法矢,$\langle\ ,\ \rangle: A^{n+1*}\times A^{n+1}\to R$ 为典型配合,则

$$\Delta f = - nL_1 f.$$

于是

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = - nL_1 f^2 + \sum f_i^2, \int_M (\sum f_i^2) dv - \int_M nL_1 f^2 dv = 0.$$

若 L_1 处处小于或等于零，上式可推出 $f=$ 常数，由于 a 是任意的，因此 U 为常矢量，这是不可能的。由此可知，对于紧致无边的仿射球，$L_1=$ 常数 >0。由(10)可知 $\Delta J \geqslant 0$，即 J 是次调合函数。因而 $J=$ 常数。由(10)可推出 $J=0$。根据第一章§8的定理8·1可知，$x(M)$ 是椭球。证毕。

推论　设 M 是完备的椭圆型仿射球，则 M 是椭球。

证明　由第一章§9中的(19)，仿射球的李奇曲率满足

$$R_{ij} \geqslant (n-1)L_1\delta_{ij},$$

即知椭圆型仿射球的李奇曲率以正常数为下界。因为 M 是完备的，由 Bonnet 定理，M 是紧致无边的。由定理3·1，M 是一个椭球。证毕。

上述定理告诉我们：完备的椭圆型仿射球是唯一的。

从定理3.1的证明可知，下面的定理成立。

定理3·2　A^{n+1} 中不存在具有非正仿射平均曲率的紧致无边的局部严格凸的超曲面。

3.2　测地距离函数的拉普拉斯的估计

在后面的讨论中，我们要碰到一些不是处处可微的函数，并要对它的拉普拉斯进行估计。因此有必要引进广义的拉普拉斯和梯度等概念。设 M 是一黎曼流形，∇、Δ 分别是 M 上的梯度算子和拉普拉斯算子，对于 C^2 函数 u，$\Delta u + f(u, \|\nabla u\|) \geqslant v$ 是有意义的，其中 f 是可微函数，v 是任意函数，$\|\nabla u\|$ 表示 u 的梯度的模，现在我们把它推广到对上半连续函数 u 也有意义。

定义 3.1　设 u 是 M 上的上半连续函数，称在 M 上[①]

$$\Delta u + f(u, \|\nabla u\|) \overset{(弱)}{\geqslant} v, \tag{11}$$

如果对任意点 $x_0 \in M$ 和任意小的正数 $\varepsilon > 0$，存在 x_0 的邻域 $N_{x_0,\varepsilon}$ 和定义在 $N_{x_0,\varepsilon}$ 上的 C^2 函数 $u_{x_0,\varepsilon}$，使

$$u(x) - u_{x_0,\varepsilon}(x) \geqslant u(x_0) - u_{x_0,\varepsilon}(x_0) = 0,\ \forall\, x \in N_{x_0,\varepsilon},$$

并且 $u_{x_0,\varepsilon}$ 在点 x_0 满足通常意义的不等式

$$\Delta u_{x_0,\varepsilon} + f(u_{x_0,\varepsilon}, \|\nabla u_{x_0,\varepsilon}\|) \geqslant v(x_0) - \varepsilon。$$

类似地，如果 u 是下半连续函数，我们称

$$\Delta u + f(u, \|\nabla u\|) \overset{(弱)}{\leqslant} v \tag{11'}$$

如果对任意的 $x_0 \in M$ 和任意小的正数 $\varepsilon > 0$，存在 x_0 的邻域 $N_{x_0,\varepsilon}$ 和定义在 $N_{x_0,\varepsilon}$ 上的 C^2 函数 $U_{x_0,\varepsilon}$，使得

$$u(x) - u_{x_0,\varepsilon}(x) \leqslant u(x_0) - u_{x_0,\varepsilon}(x_0) = 0, \forall\, x \in N_{x_0,\varepsilon},$$

并且 $u_{x_0,\varepsilon}$ 在点 x_0 满足通常意义的不等式

$$\Delta u_{x_0,\varepsilon} + f(u_{x_0,\varepsilon}, \|\nabla u_{x_0,\varepsilon}\|) \leqslant v(x_0) + \varepsilon。$$

显然，若 u 是 C^2 函数，不等式(11)和(11′)在通常意义下成立，当且仅当它在弱的意义下成立。

我们先介绍一下完备黎曼流形的割点轨迹(cut locus)的有关知识，详细的请参看[Kob-N]的第八章的第七节。

设 M 是完备的黎曼流形，$p \in M$ 是一固定点，对任意的点 $x \in M$，至少可以作一条最短测地线段连接 p 和 x，设 $\sigma = \sigma(t)$，$0 \leqslant t < \infty$，是从 p 点出发的以弧长为参数的测地线。令 $I = \{t \in R \mid t > 0,\ \sigma|_{[0,t]}$是连接 p 和 $\sigma(t)$的最短测地线段$\}$，

则 I 有以下性质：

1)如果 $s \in I$ 和 $0 < t < s$，则 $t \in I$；

2)设 s 是一正数，若一切满足 $0 < t < s$ 的 t 都属于 I，则 s 也

---

① 此处采用的本质上是 Calabi 的定义，参看[$Ca-I$]。

属于 I。

由上述两条性质可知，要么 $I=(0,\infty)$，要么 $I=(0\ s]$，s 为一有限正数。点 $\sigma(s)$ 被称为点 p 沿 $\sigma(t)$ 的**割点**(cut point)。它或者是点 p 沿 $\sigma(t)$ 的第一共轭点，或者有至少两条最短测地线段把它与点 p 连接，当 $I=(0,\infty)$ 时，称 p 为沿 $\sigma(t)$ 无割点，点 p 的全体割点集合被称为点 p 的**割点轨迹**，记为 $C(p)$。如果 $\sigma(s)$ 是点 p 沿 $\sigma(t)$ 的割点，则点 p 也是 $\sigma(s)$ 沿 $\sigma(t)$ 的割点(沿相反的方向)。

令 S_p 表示 M 在点 p 的单位切向量的集合，R^+ 表示正实数集，定义函数 $\mu: S_p\to R^+\cup\{\infty\}$ 如下：

对任意的 $X\in S_p$，作测地线 $\sigma(t)=\exp tX$，$0\leqslant t<\infty$，其中 exp 表示 M 在点 p 的指数映射，如果 $\exp sX$ 是点 p 沿 $\sigma(t)$ 的割点，则记 $\mu(X)=s$；若 p 点沿 $\sigma(t)$ 无割点，记 $\mu(X)=\infty$。
令

$$E=\{tX\,|\,X\in S_p, 0\leqslant t<\mu(X)\},$$

$$\tilde{C}(p)=\{\mu(X)X\,|\,X\in S_p, \mu(X)<\infty\},$$

则 $\exp(\tilde{C}(p))=C(p)$。我们有下面的引理。

引理 3.2 1) E 是 T_pM 中的开胞腔(cell)；

2) exp 把 E 微分同胚地映射到 M 的一个开子集；

3) $M=C(p)\cup\exp(E)$，$C(p)\cap\exp(E)=\varnothing$。

显然，$C(p)$ 是一个零测集。由引理 3.2，$\exp(E)$ 是 M 的稠密开子集。

设 $r=r(x)$ 是从点 p 算起的测地距离函数，则 $r(x)$ 在 $\exp(E)$ 上是可微的，而在 $C(p)$ 上仅仅连续。设 r_0 是一个任意的正数，作测地球 $S(r_0)$：

$$S(r_0)=\{x\in M\,|\,r(x)=r_0\}.$$

在 $S(r_0)\cap\exp(E)$ 的任意一点的邻域内，$S(r_0)$ 是光滑曲面。在 $S(r_0)$ 上选取局部单位正交标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_n\}$，使 $x\in S(r_0)\cap$

$\exp(E), e_1, \cdots, e_{n-1} \in T_x S(r_0), e_n = \frac{\partial}{\partial r}$($\frac{\partial}{\partial r}$为从点 p 出发到 x 的测地线在点 x 的单位向量，由 Gauss 引理，$\frac{\partial}{\partial r}$ 是 $S(r_0)$ 在点 x 的单位法矢)。将这场标架沿着由 p 出发经过 x 的测地线平行移动，得到 M 上的局部单位正交标架场，并且 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 切于 $S(r)$，$e_n = \frac{\partial}{\partial r}$。设 ω^1，$\omega^2, \cdots, \omega^n$ 为对偶标架场，易知 $\omega^n = dr$。下面我们约定求和指标的取值范围：

$$1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n-1,\ 1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leqslant n。$$

我们有

$$\nabla e_i = \sum_k \omega_i^k e_k + \omega_i^n e_n, \tag{12}$$

$$\nabla e_n = \sum \omega_n^k e_k,$$

式中 ∇ 表示 M 上的协变微分算子。设 ω^i、ω_i^j、ω_i^n 在 $S(r)$ 上的限制为 $\tilde{\omega}^i$、$\tilde{\omega}_i^j$、$\tilde{\omega}_i^n$，我们有

$$\begin{aligned} \omega^i &= \tilde{\omega}^i + a^i dr, \\ \omega_i^j &= \tilde{\omega}_i^j + a_i^j dr, \\ \omega_i^n &= \tilde{\omega}_i^n + a_i^n dr. \end{aligned} \tag{13}$$

由于 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$ 沿着测地线平行，因此

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_i = 0,$$

从而有

$$a_i^j = 0,\ a_i^n = 0.$$

再由 $\omega^i\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = 0$，得到 $a^i = 0$。于是有

$$\omega^i = \tilde{\omega}^i,\ \omega_i^j = \tilde{\omega}_i^j \tag{14}$$

$$\omega_i^n = \tilde{\omega}_i^n = \sum h_{ij} \tilde{\omega}^j = \sum h_{ij} \omega^j, \tag{15}$$

h_{ij} 是 $S(r)$ 的第二基本形式，令

$$dr = \sum r_{,\alpha} \omega^\alpha,$$

显然

$$r_{,i}=0,\ r_{,n}=1, \tag{16}$$

再有

$$\sum r_{,i\alpha}\omega^{\alpha}=dr_{,i}-\sum r_{,\beta}\omega_i^{\beta}=-\omega_i^n=-\sum h_{ij}\omega^j,$$

$$\sum r_{,n\alpha}\omega^{\alpha}=dr_{,n}-\sum r_{,\beta}\omega_n^{\beta}=0.$$

从而有

$$r_{,ij}=-h_{ij},\quad r_{,n\alpha}=0.$$

由此推出

$$\Delta r=-(n-1)h, \tag{17}$$

h 是 $S(r)$的平均曲率，下面我们计算$\frac{\partial h}{\partial r}$。外微分(15)得到

$$\sum\omega_i^j\wedge\omega_j^n+\Omega_i^n=\sum d_{s(r)}h_{ik}\wedge\omega^k+\sum\frac{\partial h_{ik}}{\partial r}dr\wedge\omega^k$$

$$+\sum h_{ik}\omega^j\wedge\omega_j^k+\sum h_{ik}dr\wedge\omega_n^k, \tag{18}$$

式中 $\Omega_i^n=\frac{1}{2}\Sigma R_{i\alpha\beta}^n\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}$ 为 M 上的曲率形式，$d_{s(r)}$ 为 $s(r)$上的外微分算子，比较(18)的两端含 dr 的项得

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial r}=R_{inj}^n+\sum h_{ik}h_{kj}。 \tag{19}$$

因此有

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{1}{n-1}\left(\sum h_{ij}^2+R_{nn}\right), \tag{20}$$

式中 R_{nn} 为 e_n 方向的李奇曲率。若假定 M 的李奇曲率有下界，即对 M 上的任意切向量 $X=\Sigma X^{\alpha}e_{\alpha}$，$\Sigma R_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}\geqslant(n-1)K\Sigma(X^{\alpha})^2$，$K$ 为常数，则

$$\frac{\partial h}{\partial r}\geqslant\frac{1}{n-1}\sum h_{ij}^2+K\geqslant h^2+K. \tag{21}$$

设 $K<0$，解微分方程$\frac{\partial h}{\partial r}=h^2+K$，其通解为

$$\frac{1}{2\sqrt{-K}}\log\frac{h-\sqrt{-K}}{h+\sqrt{-K}}=r+C, \tag{22}$$

注意到$\frac{\partial}{\partial r}$是 $S(r)$的外法向量，容易知道 $\lim\limits_{r\to 0}h=-\infty$，因此在(22)中令 $r\to 0$，得到 $C=0$。从而微分方程$\frac{\partial h}{\partial r}=h^2+k$ 在边界条件 $\lim\limits_{r\to 0}h=-\infty$下的解为

$$h=-\sqrt{-K}\frac{e^{r\sqrt{-K}}+e^{-r\sqrt{-K}}}{e^{r\sqrt{-K}}-e^{-r\sqrt{-K}}}=\sqrt{-k}\operatorname{cth}(r\sqrt{-k}) \tag{23}$$

由(21)知

$$h\geqslant-\sqrt{-K}\operatorname{cth}(r\sqrt{-K}). \tag{24}$$

把(24)代入(17)得到在 r 的可微点

$$\Delta r\leqslant(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}(r\sqrt{-K})。 \tag{25}$$

如果 $x_0\in C(p)$，对任意的 $0<\delta<r(x_0)$，在任意一条连接 p 和 x_0 的最短测地线段 σ 上选一点 p'，使 $r(p')=\delta$。在上面的讨论中用 p'代替 p，则 $x_0\notin C(p')$，为了区别起见，我们把从 p' 算起的测地距离函数记为 $r_{p'}$，则 $r_{p'}$ 在 x_0 的邻域内是可微的，由上面的讨论我们有

$$\Delta r_{p'}\leqslant(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}(\sqrt{-K}r_{p'}), \tag{26}$$

此外，由距离函数的三角形不等式，我们有

$$r-r_{p'}\leqslant\delta, \tag{27}$$

并且在点 x_0 等号成立。把(27)代入(26)得

$$\Delta r_{p'}\leqslant(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}((r-\delta)\sqrt{-K}),$$

对任意小的正数 ε，选择 $\delta>0$，使

$$(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}((r-\delta)\sqrt{-K})$$

$$\leqslant(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}(r\sqrt{-K})+\varepsilon.$$

令 $r_\varepsilon=\delta+r_{p'}$ 则对 x_0 的邻域内的任一点 x 有

$$r(x)-r_{\epsilon}(x)\leqslant r(x_0)-r_{\epsilon}(x_0)=0,$$

并且在点 x_0

$$\Delta r_{\epsilon}=\Delta r_{y}\leqslant(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}(r\sqrt{-K})+\epsilon.$$

由定义 3.1，在 r 的不可微点，下式成立：

$$\Delta r\overset{(\text{弱})}{\leqslant}(n-1)\sqrt{-K}\operatorname{cth}(r\sqrt{-K}). \tag{28}$$

当 $K=0$、$K>0$ 时，类似地进行上面的讨论，于是我们已经证明了下面定理。

定理 3.3 设 M 是完备的黎曼流形，p 是 M 上一固定点，$r(x)$ 是从点 p 算起的测地距离函数，假定 M 的李奇曲率有下界 K，则

$$\Delta r\overset{(\text{弱})}{\leqslant}(n-1)\tau(K,r), \tag{29}$$

其中

$$\tau(K,r)=\begin{cases}\sqrt{K}\operatorname{ctg}(r\sqrt{K}), & \text{当 } K>0;\\ \dfrac{1}{r}, & \text{当 } K=0;\\ \sqrt{-K}\operatorname{cth}(r\sqrt{-K}), & \text{当 } K<0.\end{cases} \tag{30}$$

在 r 的可微点，不等式(29)是在通常意义下的。

注记 上述证明取材于[Ca-1]，[Ca-3]。利用雅可比场理论可以给出一个新证明，参看[Ya-S]。

推论 在定理 3.3 的条件下，假定 $f(t)$，$t\geqslant 0$，是单调递增的可微函数，则

$$\Delta f(t)\overset{(\text{弱})}{\leqslant}f''(r)+(n-1)\tau(K,r)f'(r), \tag{31}$$

其中 $\tau(K,r)$ 由(30)给定。在 r 的可微点，不等式(31)是在通常意义下的。

证明 由于

$$\Delta f(r)=f'(r)\Delta r+f''(r)\|\nabla r\|^2,$$

利用 $\|\nabla r\|=1$ 和(29)，以及 $f'(r)\geqslant 0$ 即得(31)，证毕。

3.3　完备黎曼流形上的微分不等式

设 M 是李奇曲率有下界的完备黎曼流形，本段研究 M 上的微分不等式

$$\Delta u + f(u, \|\nabla u\|) \overset{(弱)}{\geqslant} v$$

对某类函数 f，我们将给出 u 的上界的估计，并将它用于仿射微分几何。

设 p 是 M 上一固定点，r 是从点 p 算起的测地距离函数，Φ 是 M 上的 C^2 函数，$\Phi>0$。记 $B(a)=\{x\in M \mid r(x)\leqslant a\}$，定义 $B(a)$ 内的函数

$$F = \frac{1}{(a^2-r^2)^{\alpha}\Phi},$$

其中 α 是一正常数。当 $r\to a$ 时 F 一致趋于 ∞，故 F 在 $B(a)$ 的某内点 q 处取最小值。我们可以假定 r^2 在点 q 的邻域内是 C^2 的，后面我们将说明这样假定是合理的。在点 q 我们有

$$\nabla F = 0,$$

$$\Delta F \geqslant 0,$$

$$-\frac{\nabla\Phi}{\Phi} + \frac{\alpha\nabla r^2}{a^2-r^2} = 0 \tag{32}$$

即

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Phi} + \frac{\|\nabla\Phi\|^2}{\Phi^2} + \frac{\alpha\Delta r^2}{a^2-r^2} + \frac{\alpha\|\nabla r^2\|^2}{(a^2-r^2)^2} \geqslant 0. \tag{33}$$

把(32)代入(33)得

$$\frac{\alpha\Delta r^2}{a^2-r^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)\|\nabla r^2\|^2}{(a^2-r^2)^2} \geqslant \frac{\Delta\Phi}{\Phi}. \tag{34}$$

当 $r\neq 0$ 时有(假定李奇曲率的下界 $K<0$)

$$\|\nabla r^2\|^2 = 4r^2\|\nabla r\|^2 = 4r^2 \leqslant 4a^2, \tag{35}$$

$$\Delta r \leqslant (n-1)\sqrt{-K})\mathrm{cth}(r\sqrt{-K}). \tag{36}$$

由双曲函数的性质易知

$$\sqrt{-K}r\operatorname{cth}(r\sqrt{-K}) \leqslant 1+\sqrt{-K}r,$$

所以

$$r\Delta r \leqslant (n-1)(1+\sqrt{-K}r), \tag{37}$$

$$\Delta r^2 = 2\|\nabla r\|^2 + 2r\Delta r = 2(1+r\Delta r)$$
$$\leqslant 2[1+(n-1)(1+a\sqrt{-K})]. \tag{38}$$

根据连续性，(37)和(38)在 $r=0$ 处也成立。把它们带入(34)，在点 q 我们有

$$4a(a+1)a^2 + 2a[1+(n-1)(1+a\sqrt{-K})](a^2-r^2)$$
$$\geqslant (a^2-r^2)^2\Phi^{-1}\Delta\Phi,$$

从而

$$[(a^2-r^2)^a\Phi]^{\frac{2}{a}}\Phi^{-1-\frac{2}{a}}\Delta\Phi$$

$$\leqslant 4a(a+1)a^2 + 2a[1+(n-1)(1+\sqrt{-K}a)]a^2. \tag{39}$$

不难看出，(39)在 F 的任意局部最小值点都成立。下面我们说明假定 r^2 在点 q 可微是合理的。如果 $q\in C(p)$，我们在连接 p 和 q 的最短测地线段上任取一点 p'，用从 p' 算起的测地距离函数 $r_{p'}$ 代替 r，显然 $q\notin C(p')$。这时 $r_{p'}$ 在点 q 可微，我们考虑函数

$$\tilde{F} = \frac{1}{[a^2-(r(p')+r_{p'}(x))^2]^a\Phi}.$$

则 $\tilde{F}$ 仍在点 q 达到最小值。事实上

$$\frac{1}{[a^2-(r(p')+r_{p'})^2]^a\Phi} \geqslant \frac{1}{[a^2-r^2(x)]^a\Phi}$$

$$\geqslant \frac{1}{[a^2-r^2(q)]^a\Phi(q)} = \frac{1}{[a^2-(r(p')+r_{p'}(q))^2]^a\Phi}.$$

因此可以对函数 $\tilde{F}$ 进行上面的计算，然后令 $p'\to p$。

现在我们考虑 M 上的连续函数 u，$u>0$，u 不一定可微，仍作函数

$$F = \frac{1}{(a^2-r^2)^a u},$$

其中 a 为正常数，F 在 $B(a)$ 的某内点 q 处达到最小值。假定 u 满足以下不等式

$$\Delta u \overset{(\text{弱})}{\geqslant} f(u) - mu^{(1-l)(1+\frac{2}{\alpha})-l}\|\nabla u\|^{2l},$$

其中 l、m、α 是常数，$l\geqslant 1$，$m\geqslant 0$，$\alpha>0$，$f(u)$ 满足条件：存在常数 $b>0$、$N>0$，使当 $u>N$ 时 $f(u)\geqslant bu^{1+\frac{2}{\alpha}}$。根据定义 3.1，对任意 $\varepsilon>0$，存在 q 的邻域 $N_{q,\varepsilon}$ 以及定义在 $N_{q,\varepsilon}$ 上的 C^2 函数 $u_{q,\varepsilon}$，使

$$u(x) - u_{q,\varepsilon}(x) \geqslant u(q) - u_{q,\varepsilon}(q) = 0, \quad \forall\, x \in N_{q,\varepsilon},$$

并且在点 q 成立以下通常意义的不等式：

$$\Delta u_{q,\varepsilon} \geqslant f(u_{q,\varepsilon}) - m u_{q,\varepsilon}{}^{(1-l)(1+\frac{2}{\alpha})-l}\|\nabla u_{q,\varepsilon}\|^{2l} - \varepsilon.$$

如果 $u(q)>N$，则在点 q，有

$$\Delta u_{q,\varepsilon} \geqslant b u_{q,\varepsilon}{}^{1+\frac{2}{\alpha}} - m u_{q,\varepsilon}{}^{(1-l)(1+\frac{2}{\alpha})-l}\|\nabla u_{q,\varepsilon}\|^{2l} - \varepsilon. \tag{40}$$

函数 $\dfrac{1}{(a^2-r^2)^{\alpha}u_{q,\varepsilon}}$ 在点 q 也取局部最小值。事实上，对点 q 附近的 x，有

$$\frac{1}{(a^2-r^2)^{\alpha}u_{q,\varepsilon}} \geqslant \frac{1}{(a^2-r^2)^{\alpha}u} \geqslant \frac{1}{(a^2-r^2(q))^{\alpha}u(q)}$$
$$= \frac{1}{(a^2-r^2(q))^{\alpha}u_{q,\varepsilon}(q)}.$$

因此对函数 $u_{q,\varepsilon}$ 可以应用(32)和(39)，在 q 点(32)给出

$$\|\nabla u_{q,\varepsilon}\|^2 = \frac{4\alpha^2 r^2}{(a^2-r^2)^2}u_{q,\varepsilon}^2 = \frac{4\alpha^2 r^2}{(a^2-r^2)^2}u^2(q). \tag{41}$$

把(40)和(41)代入(39)可得

$$b[(a^2-r^2)^{\alpha}u(q)]^{\frac{2}{\alpha}} - m(4\alpha^2 r^2)^l[(a^2-r^2)^{\alpha}u(q)]^{\frac{2}{\alpha}(1-l)}$$
$$- \varepsilon[(a^2-r^2)^{\alpha}u(q)]^{\frac{2}{\alpha}}u(q)^{-1-\frac{2}{\alpha}}$$
$$\leqslant 4\alpha(\alpha+1)a^2 + 2\alpha[1+(n-1)(1+\sqrt{-K}a)]a^2. \tag{42}$$

令 $\varepsilon\to 0$，我们得到

$$b[(a^2-r^2)^{\alpha}u(q)]^{\frac{2}{\alpha}} - m(4\alpha^2 a^2)^l[(a^2-r^2)^{\alpha}u(q)]^{\frac{2}{\alpha}(1-l)} \leqslant p(a),$$

式中 $p(a)$ 表示(42)右边关于 a 的常系数三次多项式。由于 $[(a^2-$

$r^2)^\alpha u]^{\frac{2}{\alpha}}$在点 q 取最大值，并且 $l\geqslant 1$，因此对任意点 x，有

$$b[(a^2-r^2)^\alpha u(x)]^{\frac{2}{\alpha}}-m(4\alpha^2a^2)^l[(a^2-r^2)^\alpha u(x)]^{\frac{2}{\alpha}(1-l)}\leqslant p(a).$$

或

$$u(x)\leqslant\left[\frac{p(a)+m(4\alpha^2a^2)^l[(a^2-r^2)^\alpha u(x)]^{\frac{2}{\alpha}(1-l)}}{b(a^2-r^2)^2}\right]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

当 $u(q)\leqslant N$ 时，有

$$(a^2-r^2)^\alpha u\leqslant(a^2-r^2(q))^\alpha u(q)\leqslant a^{2\alpha}N.$$

因此对任意点 x 有

$$u\leqslant\max\left\{\left[\frac{p(a)+m(4\alpha^2a^2)^l[a^2-r^2)^\alpha u]^{\frac{2}{\alpha}(1-l)}}{b(a^2-r^2)^2}\right]^{\frac{\alpha}{2}},\frac{a^{2\alpha}N}{(a^2-r^2)^\alpha}\right\}.\tag{43}$$

固定点 x，令 $a\to\infty$，我们得到

$$u\leqslant N.$$

于是，我们已经证明了下面的定理。

定理 3.4 设 M 是李奇曲率有下界的完备黎曼流形，u 是 M 上的连续函数，$u>0$，如果 u 满足

$$\Delta u\overset{(\text{弱})}{\geqslant}f(u)-mu^{(1-l)(1+\frac{2}{\alpha})-l}\|\nabla u\|^{2l},$$

其中 m、l、α 是常数，$m\geqslant 0$，$l\geqslant 1$，$\alpha>0$，f 满足条件：存在常数 $b>0$，$N>0$，当 $u>N$ 时 $f(u)\geqslant bu^{1+\frac{2}{\alpha}}$，则在 M 上

$$u\leqslant N.$$

推论 设 M 是李奇曲率有下界的完备黎曼流形，Φ 是 M 上的非负连续函数，Φ 满足

$$\Delta\Phi\overset{(\text{弱})}{\geqslant}b_0\Phi^k-b_1\Phi^{k-1}-\cdots-b_{k-1}\Phi-b_k,$$

其中 k 是大于 1 的整数，$b_0>0$，$b_1\geqslant 0,\cdots,b_k\geqslant 0$。设 N 是方程

$$b_0\Phi^k-b_1\Phi^{k-1}-\cdots-b_k=0$$

的最大根，则

$$\Phi(x)\leqslant N,\ \forall\, x\in M,$$

证明　任取 $\varepsilon > 0$，令 $u = \Phi + \varepsilon$，则 $u > 0$，并且 u 满足

$$\Delta u \overset{(弱)}{\geqslant} b_0(u-\varepsilon)^k - b_1(u-\varepsilon)^{k-1} - \cdots - b_k$$

取 $0 < b < b_0$，设 $N(b,\varepsilon)$ 是方程

$$b_0(u-\varepsilon)^k - bu^k - b_1(u-\varepsilon)^{k-1} - \cdots - b_k = 0$$

的最大根，则当 $u > N(b,\varepsilon)$ 时

$$\Delta u \overset{(弱)}{\geqslant} bu^k.$$

由定理 3.4 推得 $u \leqslant N(b,\varepsilon)$。令 $b \to 0$，则 $N(b,\varepsilon)$ 趋于方程

$$b_0(u-\varepsilon)^k - b_1(u-\varepsilon)^{k-1} - \cdots - b_k = 0$$

的最大根，而它的最大根恰为 $N+\varepsilon$。因此 $u \leqslant N+\varepsilon$，即 $\Phi \leqslant N$。证毕。

3.4　双曲型或抛物型仿射球的李奇曲率估计

我们现在把上一段得到的结果应用于仿射微分几何。Calabi 证明了一个完备的抛物型或双曲型仿射球 M 的李奇曲率是负半定的（参看[Ca-3]）。这一事实的证明需要对 Fubini-Pick 形式作精确的估计。令

$$\Psi(x) = \sup_{\xi \in T_xM}\left\{\left(\frac{\sum A^i_{jk}A^j_{il}\xi^k\xi^l}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \,\middle|\, \sum G_{kl}\xi^k\xi^l = 1\right\}, \tag{44}$$

$\Psi(x)$ 是 M 上的连续函数，但不一定可微。我们证明

命题 3.1

$$\Delta\Psi \overset{(弱)}{\geqslant} (n+1)(\Psi^3 + L_1\Psi). \tag{45}$$

证明　设 $x_0 \in M$ 是一固定点，假定 $\xi(x_0)$ 是 x_0 点的单位切向量，它使 $\sum A^i_{jk}A^j_{il}\xi^k\xi^l$ 达到最大值。把 $\xi(x_0)$ 沿着从 x_0 出发的各个方向的测地线平行移动，形成 x_0 的邻域 N 内的一单位切向量场 η。考虑 N 上的可微函数

$$\overline{\Psi} = \left(\frac{\sum A^i_{jk}A^j_{il}\eta^k\eta^l}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{46}$$

因为 η 是单位切向量场，显然 $\bar{\Psi}\leqslant\Psi$，而且在点 x_0，$\bar{\Psi}(x_0)=\Psi(x_0)$。根据定义 3.1，要证明命题 3.1 需证明在点 x_0 有

$$\Delta\bar{\Psi}\geqslant(n+1)(\Psi^3+L_1\Psi)=(n+1)(\bar{\Psi}^3+L_1\bar{\Psi}). \tag{47}$$

因 η 沿每一条测地线平行，我们有

$$\nabla\eta(x_0)=0,\quad \Delta\eta(x_0)=0.$$

如果 $\Psi(x_0)=\bar{\Psi}(x_0)\neq0$，我们有

$$\begin{aligned}(n-1)\Delta\bar{\Psi}(x_0)&=\Big\{\frac{1}{2\bar{\Psi}}\sum\Delta(A^i_{jk}A^j_{il})\eta^k\eta^l-\frac{1}{4(n-1)\bar{\Psi}^3}\\&\quad\times\sum\nabla^m(A^i_{jk}A^j_{il})\nabla_m(A^{i'}_{j'k'}A^{j'}_{i'l'})\eta^k\eta^l\eta^{k'}\eta^{l'}\Big\}\Big|_{x_0}\\&=\Big\{\frac{1}{\bar{\Psi}}\sum A^i_{jk}(\Delta A^j_{il})\eta^k\eta^l+\frac{1}{(n-1)\bar{\Psi}^3}\sum\big[A^i_{jk}A^j_{il}(\nabla^mA^{i'}_{j'k'})\\&\quad(\nabla_mA^{j'}_{i'l'})-A^i_{jk}(\nabla^mA^j_{il})A^{i'}_{j'k'}(\nabla_mA^{j'}_{i'l'})\big]\eta^k\eta^l\eta^{k'}\eta^{l'}\Big\}\Big|_{x_0}\\&\geqslant\Big\{\frac{1}{\bar{\Psi}}\sum A^i_{jk}(\Delta A^j_{il})\eta^k\eta^l\Big\}\Big|_{x_0},\end{aligned} \tag{48}$$

式中 $\nabla_m:=\nabla e_m$，$\nabla^m:=\Sigma G^{ml}\nabla e_l$。由于 M 是双曲型或抛物型仿射球，由(4)和(2)得到

$$\begin{aligned}\Delta A^i_{jk}&=\sum A^{il}_{j}A^l_{lm}A^m_{ik}+\sum A^l_{km}A^{il}_{j}A^m_{il}+\sum A^i_{km}A^m_{il}A^{il}_{j}\\&\quad-2\sum A^{il}_{m}A^m_{il}A^l_{jk}+(n+1)L_1A^i_{jk}.\end{aligned} \tag{49}$$

将(49)代入(48)得到在点 x_0，有

$$\begin{aligned}(n-1)\bar{\Psi}\Delta\bar{\Psi}(x_0)&\geqslant\Big\{\sum A^i_{jk}\eta^k(A^i_{lm}A^{ml}_{j}A^j_{il}+A^i_{lm}A^{ml}_{j}A^j_{il}\\&\quad+A_{ilm}A^{lm}_{j}A^{lj}-2A^{il}_{j}A^l_{im}A^m_{il}+(n+1)L_1A^j_{il})\eta^l\Big\}\Big|_{x_0}\\&=\Big\{\sum_m\Big[\Big(\sum\eta^lA^i_{jk}A^j_{im}\Big)\Big(\sum\eta^lA^{i'}_{j'l}A^{j'm}_{i'}\Big)\Big]+(n^2-1)L_1\bar{\Psi}^2\\&\quad+\sum\Big[\sum\eta^k(A^i_{jk}A^j_{il}-A^i_{lk}A^j_{ji})\sum\eta^l(A^i_{ml}A^{mj}_{j}-A^j_{ml}A^{mj}_{j})\Big]\Big\}\Big|_{x_0}\\&\geqslant\{(n-1)^2\bar{\Psi}^4+(n^2-1)L_1\bar{\Psi}^2+2(n-1)\bar{\Psi}^4\}\big|_{x_0}\end{aligned}$$

$$=(n-1)(n+1)(\bar{\Psi}^4+L_1\bar{\Psi}^2)|_{x_0}. \tag{50}$$

从(50)立刻推出(47)。当 $\Psi(x_0)=0$ 时，不等式(47)是平凡的。证毕。

定理 3.5　设 M 是 A^{n+1} 中的完备的抛物型或双曲型仿射球，则它的李奇曲率是负半定的。

证明　由命题 3.1 和定理 3.4 的推论可知

$$\Psi(x)\leqslant\sqrt{-L_1},\quad \forall\, x\in M.$$

由第一章 § 9 中的公式(19)，可推出李奇曲率是负半定的。证毕。

推论　对完备的双曲型仿射球，

$$J\leqslant -L_1.$$

由此推论，我们得到以下定理。

定理 3.6　A^{n+1} 中的完备的抛物型仿射球必为椭圆抛物面。

证明　由 $0\leqslant J\leqslant -L_1=0$ 即得。证毕。

我们知道，一个抛物型仿射球可用方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j}\right)=1\ . \tag{51}$$

来刻画，式中 $x^{n+1}=u(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是一凸函数。从方程的角度看，定理 3.6 相当于说，方程(51)的使度量 $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^j})$ 完备的凸解是唯一的。但从分析角度看，以下的问题更自然：

设 $x^{n+1}=u(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是定义在整个 A^n 上的凸函数，并且满足方程(51)，u 是否一定是二次多项式？

若 u 定义于整个 A^n 上，M 作为 u 的图是欧氏完备的，由定理 2.2(郑一丘定理)知它也是仿射完备的。根据定理 3.6，u 是二次多项式，因此有下面定理：

定理 3.7　设 $u(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是定义在整个 A^n 上的凸函数，并且满足方程(51)，则 u 一定是一个二次多项式。

注记　这个定理 $n=2$ 时是 K. Jorgens1954 年证明的(Math. Ann, 127)；当 $n\leqslant 5$ 时是 E. Calabi　1958 年证明的([Ca—2])；对任意的 n 是 A. V. Pogorelov

1972 年证明的([Po—1])。郑绍远和丘成桐后来给出了较简单的证明，并稍微减弱了 Pogorelov 的条件。

§4 完备的双曲型仿射球的分类

我们已经知道，完备的椭圆型仿射球是二次超曲面(定理 3.1 的推论)；完备的抛物型仿射球也是二次超曲面(定理 3.6)。然而，完备的双曲型仿射球却不必是二次超曲面，例如 §1 中的例子 $x^1x^2\cdots x^{n+1}=C$，C 为正常数。事实上，Calabi 给出了许多完备的双曲型仿射球不是二次超曲面的例子。因此完备的双曲型仿射球的分类问题显得特别重要。1971 年 Calabi 提出了关于完备的双曲型仿射球的分类的猜测，他的猜测可以分成下面两部份(参看[Ca-1])：

(i) A^{n+1} 中的每一个仿射完备的 n 维双曲型仿射球渐近于 A^{n+1} 中一个凸锥的边界；

(ii) A^{n+1} 中的每一个非退化的凸锥，确定 A^{n+1} 中一个双曲型仿射球渐近于它的边界，并且这个仿射球被仿射平均曲率的值唯一确定。

这个著名的猜测后来被丘成桐、郑绍远、T. Sasaki 等人在欧氏完备的假定下解决[①]。我们知道，一个欧氏完备的仿射球是仿射完备的(郑—丘定理)和整体严格凸的。反过来，一个仿射完备的仿射球是否是欧氏完备的呢?对于椭圆型和抛物型的仿射球，这显然是真的。对于双曲型的仿射球，我们证明了加上"整体凸"的条件也是真的。结合丘成桐和郑绍远的结果，这在凸性假定下给出了 Calabi

① [Chen-Y-2]中 §5 的引理 1 说，一个仿射完备的双曲型仿射球一定是欧氏完备的。其证明主要依赖该文中的公式(5.1)。但是该公式是不正确的(参看[Li-6])。

猜测的第一部份的解答。

在这一节，我们先在欧氏完备的假设下给出 Calabi 猜测的证明。主要取材于[Chen-Y-2]和[Sa]。然后证明，一个凸的、仿射完备的双曲型仿射球是欧氏完备的，主要取材于[Li-6]。

设 M 是 A^{n+1} 中的双曲型仿射球，它的仿射平均曲率 $L_1<0$。由定理 3.2，M 不能是紧致的。在 A^{n+1} 中取一个欧氏内积，使 A^{n+1} 成为欧氏空间。我们进一步假定 M 是欧氏完备的，由定理 2.2，它也是仿射完备的，因而 M 是 A^{n+1} 中的非紧、完备、可定向、局部严格凸的光滑超曲面。根据 Hadamard 定理，M 是一个定义在某个超平面中的凸区域上的非负、严格凸的光滑函数的图。由此可见，M 是整体凸的。

因为 M 是欧氏完备的，M 上必存在到其仿射中心的欧氏距离最近的点，设 p 是这样的点。M 在点 p 的仿射法线记为 l，则平行于 l 的直线与 M 至多交于一点。事实上，若某平行于 l 的直线 l' 与 M 有两个交点 p_1 和 p_2，当 l 与 l' 不重合时，l 与 l' 所确定的二维平面 Π 与 M 交成一条过 P、P_1 和 P_2 的连续凸曲线 Γ。连接仿射中心与 $P_i(i=1,2)$ 的直线就是 M 在 P_i 的仿射法线，它们中必有一条与 Γ 交于两个点，这是不可能的，因为每一点的仿射法矢都指向凹的一边。当 l' 与 l 重合时，考虑任一过 l 的二维平面与 M 交成的凸曲线，同样推理可以证明 l 与 M 不可能交于两点。以下我们在 A^{n+1} 中选取么模仿射坐标系，使坐标原点在 M 的仿射中心，x^{n+1} 轴为 l，坐标面 $x^{n+1}=0$ 平行于 M 在点 p 的切空间。这样 M 可以看成是某个定义在超平面 $x^{n+1}=0$ 中的凸区域 Ω 上的正值光滑凸函数 f 的图，并且原点 O 在 Ω 的内部，f 在 O 点达到最小值。在这些条件下，我们证明下面的命题。

命题 4.1　　$\Omega=A^n$

证明　若 $\partial\Omega\neq\varnothing$，设 $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^n)\in\partial\Omega$，由于 Ω 是凸的，对

于 $0\leqslant t<1$，则 $t\bar{x}\in\Omega$。由于 f 的严格凸性，$\lim\limits_{t\to 1}f(t\bar{x})$ 存在。当 $\lim\limits_{t\to 1}(t\bar{x})=\infty$ 时，则连接原点和点 $(t\bar{x}^1,t\bar{x}^2,\cdots,t\bar{x}^n,f(t\bar{x}))$ 的直线，即 M 在该点的仿射法线，当 $t\to 1$ 时与 M 的交点数大于 1。这是一个矛盾。若 $\lim\limits_{t\to 1}f(t\bar{x})=$ 有限数，这与 M 的欧氏完备性矛盾。因而 $\partial\Omega=\varnothing$，即 $\Omega=A^n$。证毕。

令

$$D=\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\right)\middle| x=(x^1,\cdots,x^n)\in\Omega\right\},$$

D 是 Ω 关于 f 的 Legendre 变换域，f 的 Legendre 变换函数 u 为

$$u(\xi)=u(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)=\sum x^i\frac{\partial f}{\partial x^i}-f(x),\qquad(1)$$

$$\xi^i=\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad x\in\Omega.$$

由 §1 中的讨论，M 的 Blaschke 度量 G_{ij} 满足

$$G_{ij}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j},$$

其中 $\rho=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}$。由于 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)$、$(G_{ij})$ 正定，所以 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)$ 是正定的。从而 u 是一个严格凸的函数。因为 M 是双曲型仿射球，由 §1 中的公式(20)得

$$\left(\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)\right)^{\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{L_1u},$$

上式左端是正值，由 $L_1<0$ 可知

$$u(\xi)<0,\ \forall\ \xi=(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)\in D.\qquad(2)$$

根据 §1 中的引理 1.1，Legendre 变换

$$F:\Omega=A^n\to D$$

$$x=(x^1,\cdots,x^n)\mapsto\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\right)=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$$

是微分同胚，因此 D 是 A^n 中的开集。

令

$$C = \{t(x^1,x^2,\cdots,x^n,f(x)) \mid t > 0, x = (x^1,\cdots,x^n) \in A^n\} \quad (3)$$

表示 M 与其仿射中心所确定的锥体。由于 M 是凸超曲面，所以 C 是 A^{n+1} 中的凸锥体。由 C 我们能够作出 A^{n+1*} 中的一个锥体

$$C^* = \{\xi \in A^{n+1*} \mid \langle \xi, x\rangle \leqslant 0, \ \forall x \in C\} \quad (4)$$

其中$\langle\ ,\ \rangle$: $A^{n+1*} \times A^{n+1} \to R$ 是典型配合。通过我们在 A^{n+1} 中所取的欧氏内积，使 A^{n+1*} 与 A^{n+1} 等同。于是 C^* 是 A^{n+1} 中的一锥体，我们称 C^* 为 C 的极锥(polar cone)．显然 C^* 也是凸的。

设 θ 是 M 在点 x 的法向量，若 θ 指向 M 凸的一边，则称 θ 为 M 的外法向量，我们有

引理 4.1　M 的全体欧氏外法向量的集合等于 C^* 的内部 C^{*0}，即

$$C^{*0} = \{\xi \in A^{n+1} \mid \langle \xi, x\rangle < 0, \ \forall x \in C\}, \quad (5)$$

这里我们用$\langle\ ,\ \rangle$表示 A^{n+1} 中的内积。

证明　设 $\bar{x} \in A^n$，θ 是 M 在点$(\bar{x}, f(\bar{x}))$的一个非零欧氏外法向量，则

$$\theta = s\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\bar{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\bar{x}), -1\right),$$

其中 s 为非零实数。θ 与$(\bar{x}, f(\bar{x}))$的内积为

$$s\left(\sum \bar{x}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{x}) - f(\bar{x})\right) = su,$$

由于$(\bar{x}, f(\bar{x}))$指向凹的一边，$u<0$，要使 θ 指向凸的一边，必有 $s > 0$。对于任意的 $p \in C$，则 $p = t(x^1,\cdots,x^n,f(x))$，$t > 0$，$x = (x^1,\cdots,x^n) \in A^n$. θ 与 p 的内积为

$$\langle \theta, p\rangle = st\left(\sum x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{x}) - f(x)\right).$$

因为函数 $\sum x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{x}) - f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 取得最大值 $u(\bar{x})$，由 $st > 0$ 及

$u<0$ 推出，$\forall\ p\in C$，$\langle O,p\rangle<0$，即 $O\in C^{*O}$。

反之，设 $\bar{\xi}=(\bar{\xi}^1,\bar{\xi}^2,\cdots,\bar{\xi}^{n+1})\in C^{*O}$，考虑超平面 Π：

$$\langle\bar{\xi},y\rangle=\bar{\xi}^1y^1+\bar{\xi}^2y^2+\cdots+\bar{\xi}^{n+1}y^{n+1}=0,$$

由 C^{*O} 的定义，M 上的点 p 满足 $\langle\bar{\xi},p\rangle<0$，即 Π 与 M 不相交，且 M 落在 $-\bar{\xi}$ 决定的半空间中。沿着 $-\bar{\xi}$ 的方向平行移动 Π，由于 M 是欧氏完备和整体严格凸的，Π 必与 M 相切于一点，$\bar{\xi}$ 就是 M 在这一点的欧氏外法向量。证毕。

下面我们证明 D 是有界凸域，要证明这个事实还需要下面的引理（参看[Chen-Y-2]）：

引理 4.2 设 W 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界域，φ 是定义在 $W\times\mathbf{R}$ 上的函数，$\varphi(x,u)$ 关于变元 $u\leqslant0$ 是增加的。假定 u 和 v 是微分方程

$$\det(u_{ij})=\det\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^i\partial x^j}\right)=\varphi(x,u)$$

的两个 C^2 凸解，如果它们满足 $\lim\limits_{x\to\partial W}(u(x)-v(x))\leqslant0$ 一致成立，则在 W 上，$u\leqslant v$。

证明 设 $a_{ij}(t)$ 是矩阵 $(v_{ij}+t(u_{ij}-v_{ij}))$ 的余因子，则有下面的微分方程

$$\begin{aligned}(u-v)\left[\frac{\varphi(x,u)-\varphi(x,v)}{u-v}\right]&=\det(u_{ij})-\det(v_{ij})\\&=\int_0^1\frac{d}{dt}\det(v_{ij}+t(u_{ij}-v_{ij}))dt\\&=\sum\left(\int_0^1a_{ij}(t)dt\right)(u-v)_{ij}.\end{aligned}$$

由 u 和 v 的严格凸性和标准的椭圆算子理论，

$$\sum\left(\int_0^1a_{ij}(t)dt\right)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$$

是一个二阶椭圆算子。引理的结论则从极大值原理推出。证毕。

有了上面的两个引理，现在我们证明下面的命题。

命题 4.2 D 是有界凸域。

证明　分两步进行。

1°　把 D 与集合

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}(x),\ -1\right)\middle|\, x\in A'\right\}$$

等同起来，由引理 4.1，D 等于 C^{*o} 与超平面 $\xi^{n+1}=-1$ 的交集，即

$$D=C^{*o}\cap\{\xi^{n+1}=-1\}. \tag{6}$$

由于 C^{*o} 是凸锥体，所以 D 是凸的。

2°　由于 f 在原点 O 取最小值，所以 Legendre 变换 F 把点 O 变成点 O。从(1)容易算得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi^i}(O)=0,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

因为$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)$正定，所以 u 在点 O 取最小值，即

$$u(\xi)\geqslant u(O),\ \forall\ \xi\in D. \tag{7}$$

因为 D 是开的，可在 D 中作一个半径为 $\varepsilon>0$，中心在点 O 的球域 $B(\varepsilon)$。假定 D 是无界的，则 D 中存在一个远离原点的点，不失一般性，设为$(t,0,\cdots,0)$，其中 t 很大。因为 D 是凸的，由点$(t,0\cdots,0)$和 $B(\varepsilon)$确定的凸包(convex　hull)，即包含点$(t,0,\cdots,0)$和 $B(\varepsilon)$的最小凸集，是 D 的一个子集。

设 $E(t)$是一个椭球体，它的中心在$(\frac{t}{4},0,\cdots,0)$，ξ^1 轴长$\frac{t}{4}$，ξ^i 轴长$\frac{\varepsilon}{2}$，$i=2,\cdots,n$，显然 $E(t)$是上述凸包的子集，即 $E(t)\subset D$。

设 $r^n=\frac{t}{4}(\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}$，通过一个幺模仿射变换，可把 $E(t)$视为一个球$\sum(\eta^i)^2\leqslant r^2$，在 $E(t)$上定义函数：

$$v(\eta)=-(-L_1)^{-\frac{n+2}{2n+2}}r^{-\frac{1}{n+1}}(r^2-\sum(\eta^i)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

容易算得

$$\min_{\eta\in E(t)}v(\eta)=-(L_1)^{-\frac{n+2}{2n+2}}r^{\frac{n}{n+1}}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^i\partial\eta^j}=(-L_1)^{-\frac{n+2}{2n+2}}r^{\frac{-1}{n+1}}\left(\delta_{ij}+\frac{\eta^i\eta^j}{r^2-\sum(\eta^k)^2}\right)\left(r^2-\sum(\eta^k)^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

(10)

$$\det\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\right)=(L_1v)^{-n-2}. \tag{11}$$

(11)表明 v 是 §1 中方程(21)在 $E(t)$上的凸解。另一方面,u 在 $E(t)$上的限制 $u|_{E(t)}$也是该方程的凸解。在 $E(t)$的边界上,$v=0$,$u<0$。由引理 4.2,在 $E(t)$上,$u\leqslant v$。从而得到

$$\begin{aligned}u(0)&=\min_{\xi\in D}u(\xi)\leqslant\min_{\xi\in E(t)}v(\xi)=-(-L_1)^{-\frac{n+2}{2n+2}}r^{\frac{n}{n+1}}\\&=-(-L_1)^{-\frac{n+2}{2n+2}}\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}.\end{aligned} \tag{12}$$

不等式(12)表明 t 是有界的。因此 D 是有界的。证毕。

现在我们在欧氏完备的假定下,证明 Calabi 猜测的第一部份。

定理 4.1 设 M 是 A^{n+1} 中欧氏完备的 n 维双曲型仿射球,则 M 渐近于它和它的仿射中心所确定的凸锥的边界。

证明 采用前面的记号,设 C 是由(3)式定义的 M 和它的仿射中心所确定的凸锥。设 g 是定义 C 的边界 ∂C 的凸函数,显然

$$f\geqslant g.$$

我们仅需证明,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 A^n 中的一个紧集 W,使当 $x\notin W$ 时,$f(x)-g(x)\leqslant\varepsilon$ 就足够了。令

$$D_\varepsilon=\{(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)\in D\,|\,u(\xi^1,\cdots,\xi^n)<-\varepsilon\},$$

由 §1 中的(16)和(17),D_ε 上的仿射度量为

$$G=(L_1u)^{-1}\sum\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j. \tag{13}$$

由于

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f\left(\frac{\partial u}{\partial\xi^1}(\xi),\cdots,\frac{\partial u}{\partial\xi^n}(\xi)\right)=\sum\xi^i\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(\xi)-u(\xi),$$

$$|\Delta f| = -nL_1\left(\sum \xi^i \frac{\partial u}{\partial \xi^i} - u\right),$$

由定理 2.1 的推论得到

$$L_1 u \sum u^{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}\frac{\partial f}{\partial \xi^j} \leqslant a\left(\sum \xi^i \frac{\partial u}{\partial \xi^i} - u + 1\right)^2 \tag{14}$$

式中 a 是仅仅依赖于 n 和 $-L_1$ 的正常数，(u^{ij}) 是 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\right)$ 之逆。因为

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^i} = \sum \xi^j \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^j \partial \xi^i},$$

代入(14)得

$$(L_1 u)\sum \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\xi^i \xi^j \leqslant a\left(\sum \xi^i \frac{\partial u}{\partial \xi^i} - u + 1\right)^2. \tag{15}$$

现在我们证明 D_ε 的闭包 $\overline{D}_\varepsilon \subset D$。若不然，则 $\partial D_\varepsilon \cap \partial D \neq \varnothing$。设 $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \cdots, \bar{\xi}^n) \in \partial D_\varepsilon \cap \partial D$，$\sigma(t) = \{t(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \cdots, \bar{\xi}^n) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是连接原点和点 $\bar{\xi}$ 的线段。由于在 D_ε 上，$L_1 u \geqslant -\varepsilon L_1 > 0$，由(15)，$\sigma(t)$ 的仿射弧长为

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \left(\frac{1}{L_1 u}\sum \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\bar{\xi}^i \bar{\xi}^j\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{L_1 u}\sum \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\bar{\xi}^i \bar{\xi}^j\right)^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{L_1 u}\sum \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\bar{\xi}^i \bar{\xi}^j\right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

上式右端的第一个积分是有限值，第二个积分为

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{L_1 u t^2}\sum \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} t\bar{\xi}^i t\bar{\xi}^j\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ \leqslant &\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{a}{L_1 u t}\left(\sum t\bar{\xi}^i \frac{\partial u}{\partial \xi^i} - u + 1\right) dt \\ \leqslant &-\frac{a}{L_1 \varepsilon}\int_{\frac{1}{2}}^1 du(\sigma(t)) - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2a}{L_1}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) dt. \end{aligned}$$

此不等式右端的积分是有限的，因此 $\sigma(t)$ 的仿射弧长 l 是有限的。

这是一个矛盾，因为 $\sigma(t)$ 趋近于 D 的边界 ∂D，而 D 关于度量(13)是完备的，因此 $\overline{D}_t\subset D$。

由于 D 有界，$\overline{D}_t$ 是紧集，从而 $W=F^{-1}(\overline{D}_t)$ 是 A^n 中的紧集，当 $\bar{x}\in W$ 时

$$-\varepsilon\leqslant u(\xi(\bar{x}))<0,$$

即

$$-\varepsilon\leqslant\sum\bar{x}^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{x})-f(\bar{x})<0.$$

因此

$$0<f(\bar{x})-\sum\bar{x}^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{x})\leqslant\varepsilon. \tag{16}$$

另一方面，$v=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\bar{x}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}(\bar{x}),-1\right)$ 是 M 在点 $(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^n,f(\bar{x}))$ 的欧氏外法向量，由引理 4.1，∂C 上的点 $p=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^n,g(\bar{x}))$ 与 v 满足 $\langle v,p\rangle\leqslant 0$，即

$$\sum\bar{x}^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{x})-g(\bar{x})\leqslant 0.$$

代入(16)即得

$$0\leqslant f(\bar{x})-g(\bar{x})\leqslant\varepsilon.$$

由于 $\bar{x}$ 是任意的，所以结论成立。证毕。

下面我们给出 Calabi 猜测的第二部份。

定理 4.2 给定 A^{n+1} 中一个非退化的凸锥 C 和一个负常数 L_1，则 A^{n+1} 中存在唯一一个欧氏完备的双曲型仿射球 M 渐近于 C 的边界，并且以 L_1 为其仿射平均曲率。

证明 我们分五步进行。

1° C 非退化是指 C 上不含直线。不妨假定 C 的顶点在坐标原点 O。用 C^* 表示 C 的极锥，即 C^* 是由(4)式定义的对偶空间 A^{n+1*} 中的一个凸锥。选择 A^{n+1*} 的一个幺模仿射标架 $\{0;\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n+1}\}$，$A^{n+1*}$ 中的点关于这个标架的坐标用 $(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^{n+1})$ 表

示。适当选择标架可使 C^{*o} 与超平面 $\xi^{n+1}=-1$ 的交集 D 是有界凸域。设 $\{0;\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n+1}\}$ 的对偶标架为 $\{0;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，$A^{n+1}$ 中的点关于这个标架的坐标记为 $(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})$。把 D 中的点的坐标 $(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n,-1)$ 记为 $(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)$。根据郑绍远和丘成桐的一个定理（参看[Chen-Y-1]），存在唯一一个在 D 内光滑，在 $\overline{D}$ 上连续的凸函数 u 满足

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right) = (L_1 u)^{-n-2}, & \text{在 } D \text{ 内}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上}. \end{cases} \tag{17}$$

利用 u，我们定义 A^n 中的集合

$$\Omega = \{(x^1,x^2,\cdots,x^n)\,|\,x^i = \frac{\partial u}{\partial\xi^i}(\xi),\xi\in D\}$$

和 Ω 上的函数

$$f(x^1,x^2,\cdots,x^n) = \sum\xi^i\frac{\partial u}{\partial\xi^i} - u(\xi).$$

由 u 的凸性，容易推出 f 的凸性。设 M 是由 f 定义的曲面，即

$$M = \{(x^1,x^2,\cdots,x^n,f(x^1,x^2,\cdots,x^n))\,|\,(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in\Omega\}.$$

因为 u 和 f 互为 Legendre 变换函数，由 §1 中的定理 1.2 知，M 是中心在原点，仿射平均曲率为 L_1 的双曲型仿射球。

2° 上面构造的 M 依赖于有界凸域 D，而 D 的构造又依赖于 A^{n+1*} 的幺模仿射标架的选取。如果另外选取 A^{n+1*} 的一个幺模仿射标架 $\{0;\bar{\delta}_1,\bar{\delta}_2,\cdots,\bar{\delta}_{n+1}\}$，该标架下点的坐标记为 $(\eta^1,\eta^2,\cdots,\eta^{n+1})$。它在 A^{n+1} 中的对偶标架设为 $\{0;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_{n+1}\}$，$A^{n+1}$ 中的点在这个标架下的坐标用 $(y^1,y^2,\cdots,y^{n+1})$ 表示。设 A^{n+1*} 中新旧坐标的变换关系为

$$\begin{pmatrix}\eta^1\\ \vdots\\ \eta^{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 & \cdots & t_{n+1}^1\\ \vdots & & \vdots\\ t_1^{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \vdots\\ \xi^{n+1}\end{pmatrix}$$

则对应的 A^{n+1} 中新旧坐标的变换为

$$(y^1,y^2,\cdots,y^{n+1})=(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})\begin{pmatrix}T_1^1 & \cdots & T_{n+1}^1\\ \vdots & & \vdots\\ T_1^{n+1} & \cdots & T_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix},$$

其中(T_B^A)为(t_B^A)的逆矩阵，它们都是幺模矩阵。若 C 在新坐标系下也对应一个有界凸域 $\hat{D}$，即 $C^{*0}\cap\{\eta^{n+1}=-1\}$是有界凸域，按 1°中的程序，从 $\hat{D}$ 也可以构造出一个双曲型仿射球 $\hat{M}$，它与 M 有相同的仿射中心（坐标原点）和相同的仿射平均曲率 L_1。我们要研究 M 与 $\hat{M}$ 的关系。关于 D 和 $\hat{D}$ 我们有下面的引理。

引理 4.3 （Ⅰ） D 上的坐标$(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n,-1)$和 $\hat{D}$ 上的坐标$(\eta^1,\eta^2,\cdots,\eta^n,-1)$满足

$$\xi^i=\left(\sum T_j^i\eta^j-T_{n+1}^i\right)\left(T_{n+1}^{n+1}-\sum T_j^{n+1}\eta^j\right)^{-1};$$

（Ⅱ） 设 $u(\xi)$是方程(17)的凸解，$v(\eta)$是方程

$$\begin{cases}\det\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\right)=(L_1v)^{-n-2}, & \text{在 } \hat{D} \text{ 内},\\ v=0, & \text{在 } \partial\hat{D} \text{ 上}\end{cases}\tag{19}$$

的凸解，则

$$u(\xi)=v(\eta)\left(T_{n+1}^{n+1}-\sum T_j^{n+1}\eta^j\right)^{-1}.$$

证明 A^{n+1*} 中的直线$(t\xi^1,t\xi^2,\cdots,t\xi^{n+1})$在新坐标系下的方程为

$$\eta^A=\sum t_B^A(t\xi^B),\quad A=1,2,\cdots,n+1,$$

或者

$$t\xi^A=\sum T_B^A\eta^B.$$

在由 A^{n+1*} 中的坐标变换诱导出的从 D 到 $\hat{D}$ 的变换下，D 上的点$(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n,-1)$所对应的 $\hat{D}$ 的点$(\eta^1,\eta^2,\cdots,\eta^n,-1)$应在射线$(t\xi^1,t\xi^2,\cdots,t\xi^n,-t)$$(t>0)$上。由(19)解得

$$t=T_{n+1}^{n+1}-\sum T_j^{n+1}\eta^j,$$

从而(Ⅰ)成立。

利用(Ⅰ)经过直接的计算可得

$$\frac{\partial}{\partial\eta^i}\left[u\left(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_j\eta^j\right)\right]$$

$$=-T^{n+1}_i u+\sum\frac{\partial u}{\partial\xi^j}\left(T^j_i+\xi^j T^{n+1}_i\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\left[u\left(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_l\eta^l\right)\right]$$

$$=\left(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_l\eta^l\right)^{-1}\sum\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^k\partial\xi^l}\left(T^k_i+\xi^k T^{n+1}_i\right)\left(T^l_j+\xi^l T^{n+1}_j\right).$$

由于

$$\det\left(T^i_j+\xi^i T^{n+1}_j\right)=\begin{vmatrix} T^1_1 & \cdots & T^1_n & \xi^1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ T^n_1 & \cdots & T^n_n & \xi^n\\ -T^{n+1}_1 & \cdots & -T^{n+1}_n & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_j\eta^j\right)^{-1},$$

所以

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\left[u\left(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_l\eta^l\right)\right]\right)$$

$$=\left[L_1 u\left(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_i\eta^i\right)\right]^{-n-2}.$$

由 u 的凸性和在 ∂D 上为零的事实,容易知道 $u(T^{n+1}_{n+1}-\Sigma T^{n+1}_i\eta^i)$ 是凸函数,并且在 $\partial\hat{D}$ 上为零,因此是方程(19)的凸解。由解的唯一性即得(Ⅱ)。证毕。

设

$$g(y^1,y^2,\cdots,y^n)=\sum\eta^i\frac{\partial v}{\partial\eta^i}-v(\eta),$$

$$y^i=\frac{\partial u}{\partial\eta^i}(\eta),\quad \eta\in\hat{D}$$

是 v 的 Legendre 变换函数。g 所定义的曲面

$$\hat{M}=\{(y^1,y^2,\cdots,y^n,g(y^1,\cdots,y^n))\,|\,y^i=\frac{\partial v}{\partial \eta^i}(\eta),\quad \eta\in\hat{D}\}$$

是仿射平均曲率为 L_1 的双曲型仿射球。由引理 4.3) $\hat{M}$ 的点的坐标满足

$$\begin{aligned}
y^i=\frac{\partial v}{\partial \eta^i}&=\sum\frac{\partial u}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^i}(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_j\eta^j)-T^{n+1}_i u\\
&=\sum T^i_j x^j+T^{n+1}_i f,\\
g&=\sum y^i\eta^i-v(\eta)\\
&=\sum(T^i_j x^j+T^{n+1}_i)\eta^i-u(T^{n+1}_{n+1}-\sum T^{n+1}_j\eta^j)\\
&=\sum T^k_{n+1}x^k+T^{n+1}_{n+1}f.
\end{aligned}$$

这表明从 D 和 $\hat{D}$ 构造的双曲型仿射球 M 和 $\hat{M}$ 是同一个曲面。

3° 现在证明 M 是欧氏完备的，我们只需证明 $\Omega=A^n$。为此在 A^n 上定义函数

$$\Psi(x)=\sup\{-u(\xi)+\sum x^i\xi^i\,|\,\xi\in\overline{D}\},\quad x\in A^n.$$

由定义，在 Ω 上 $\Psi(x)=f(x)$

对任意的 $\bar{x}\in A^n$，至少存在一点 $\bar{\xi}\in\overline{D}$，使

$$\Psi(\bar{x})=-u(\bar{\xi})+\sum\bar{x}^i\bar{\xi}^i.$$

如果存在 D 的内点 $\bar{\xi}$ 使上式成立，考虑 $\bar{\xi}$ 的邻域上的函数

$$\Phi(\xi)=-u(\xi)+\sum\bar{x}^i\xi^i,$$

它在 $\bar{\xi}$ 达到最大值，因而有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i}(\bar{\xi})=-\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(\bar{\xi})+\bar{x}^i=0.$$

由此推出 $\bar{x}^i=\frac{\partial u}{\partial\xi^i}(\bar{\xi})$，即 $\bar{x}\in\Omega$。我们断言，这样的内点 $\bar{\xi}$ 一定存在。若不然，即 $\bar{\xi}$ 只能取 D 的边界点，则对一切 $\xi\in D$，有

$$\Psi(\bar{x})=-u(\bar{\xi})+\sum\bar{x}^i\bar{\xi}^i>-u(\xi)+\sum\bar{x}^i\xi^i.\tag{20}$$

由 D 的凸性，我们可以在 $\overline{D}$ 内作一个小的 n 维闭单形 $W\subset\overline{D}$，并且

$\partial W \cap \partial D = \{\bar{\xi}\}$。设 u_W 是方程

$$\begin{cases} \det\left(\frac{\partial^2 u_W}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\right) = (L_1 u_W)^{-n-2}, & \text{在 } W \text{ 的内部} \\ u_W = 0 & \text{在 } \partial W \text{ 上} \end{cases}$$

的凸解。显然 u 在 W 的内部也满足方程 $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\right) = (L_1 u)^{-n-2}$，在 ∂W 上，$u \leqslant 0$。由引理 4.2，在 W 上 $u \leqslant u_W$。由(20)以及 $u(\bar{\xi}) = u_W(\bar{\xi})$ 可得

$$\begin{aligned} -u_W(\bar{\xi}) + \sum \bar{x}^i \bar{\xi}^i &= -u(\bar{\xi}) + \sum \bar{x}^i \bar{\xi}^i \\ &> -u(\xi) + \sum \bar{x}^i \xi^i \\ &\geqslant -u_W(\xi) + \sum \bar{x}^i \xi^i, \qquad \forall \xi \in W^\circ. \end{aligned}$$

这表明 W 上的函数 $\Phi_W(\xi) = -u_W(\xi) + \sum \bar{x}^i \xi^i$ 在 W 的边界点 $\bar{\xi}$ 达到最大值。在下面的 4° 中我们将看到，W^0 关于 u_W 的 Legenere 变换域 $\Omega_W = A^n$。于是 $\bar{x} \in \Omega_W$，$\Phi_W(\xi)$ 应在 W^0 内达到最大值。我们得到一个矛盾，这个矛盾表明 $\Omega \doteq A^n$。

4°　$\Omega_W = A^n$ 的证明。在 §1 中我们已经知道，由方程

$$x^1 x^2 \cdots x^{n+1} = c$$

$$c > 0, x^1 > 0, x^2 > 0, \cdots, c^n > 0$$

定义的曲面为双曲型仿射球，我们用 $Q(c,n)$ 记它。$Q(c,n)$ 的仿射平均曲率为 $-(n+1)^{-\frac{n+1}{n+2}} c^{-\frac{2}{n+2}}$。容易看出，适当选择常数 c 可以使 $Q(c,n)$ 的仿射平均曲率与 M 的相同，即等于 L_1。$Q(c,n)$ 渐近于凸锥

$$V = \{x \in A^{n+1} | x^1 \geqslant 0, x^2 \geqslant 0, \cdots, x^{n+1} \geqslant 0\}.$$

V 的极锥（为了方便，通过欧氏内积，我们把 A^{n+1*} 与 A^{n+1} 等同起来）为

$$V^* = \{x \in A^{n+1} | x^1 \leqslant 0, x^2 \leqslant 0, \cdots, x^{n+1} \leqslant 0\}.$$

如果对坐标系作一旋转，使新系的 y^{n+1} 轴的正向沿着 $(1,1,\cdots,1)$ 方向，则 $Q(c,n)$ 可视为某个定义在整个超平面 $y^{n+1} = 0$ 上的正值

凸函数$q(y^1,y^2,\cdots,y^n)$的图。由引理4.1，$y^{n+1}=0$关于$q(y^1,\cdots,y^n)$的Legendre变换域为$V^{*0}\cap\{y^{n+1}=-1\}$，这是一个标准的n维单形。作下面的两种变换

$$\begin{cases}\bar{y}^i=\sum a^i_j y^j,\\ \bar{y}^{n+1}=\dfrac{1}{a}y^{n+1}\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\hat{y}^i=\bar{y}^i,\\ \hat{y}^{n+1}=\bar{y}^{n+1}+\sum b_i\bar{y}^i,\end{cases}$$

其中(a^i_j)是非退化的$n\times n$矩阵，$a=\det(a^i_j)$。设$Q(c,n)$在新系下由$\hat{q}(\hat{y}^1,\hat{y}^2,\cdots,\hat{y}^n)$表示，显然$\hat{q}$是定义在整个超平面$\hat{y}^{n+1}=0$上的。适当选择$(a^i_j)$和$b_i$，就可使超平面$\hat{y}^{n+1}=0$关于$\hat{q}$的Legenere变换域为$W$。由于$\hat{q}$与$u_W$互为Legendre变换函数，从而$\Omega_W=A^n$。

5° 由3°知M是欧氏完备的双曲型仿射球，根据定理4.1，M渐近于凸锥

$$\tilde{C}=\{t(x^1,x^2,\cdots,x^n,f(x^1,\cdots,x^n))\,|\,t>0,(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in A^n\}$$

的边界。$\tilde{C}$的极锥为

$$\tilde{C}^*=\{\xi\in A^{n+1*}\,|\,\langle\xi,p\rangle\leqslant 0,\forall\, p\in\tilde{C}\}.$$

令

$$\tilde{D}=\tilde{C}^{*\circ}\cap\{\xi^{n+1}=-1\}$$

由命题4.2的证明知，$\tilde{D}$是A^n关于f的legendre变换域，因此$\tilde{D}=D$，从而$\tilde{C}=C$，即M渐近于C的边界。

设M'是另一个欧氏完备的双曲型仿射球，其仿射平均率为L_1，并且渐近于C的边界。设p为M'的仿射中心，由定理4.1，M'渐近于

$$C'=\{t(x-p)\,|\,t>0,x=(x^1,x^2,\cdots,x^{n+1})\in M'\}$$

的边界，因此$C'=C$。显然M'可表示为定义在$x^{n+1}=0$上的严格凸

函数 $f'(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 的图。由引理 4.1，$x^{n+1}=0$ 关于 $f'(x^1,\cdots,x^n)$ 的 Legendre 变换域为 D。f' 的 Legendre 变换函数 u' 满足方程(17)，由解的唯一性，$u'=u$。因此 $f'=f$，从而 M' 与 M 重合。证毕。

上面证明的定理 4.1 和定理 4.2 是在欧氏完备条件下解答了 Calabi 猜测。如果把欧氏完备换成仿射完备，定理 4.1 的结论是否成立呢？我们知道，对双曲型仿射球而言，欧氏完备隐含仿射完备。反过来，一个仿射完备的双曲型仿射球是否一定欧氏完备呢？下面我们在假定这个双曲型仿射球是一个整体凸超曲面的条件下回答这个问题。

设 M 是 A^{n+1} 中一个仿射完备的双曲型仿射球。我们首先假定 M 是定义在 A^n 中开区域上的一个严格凸的函数 $f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 的图，f 的 Legendre 变换函数 $u(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^n)=\sum x^i\frac{\partial f}{\partial x^i}-f$，$\xi^i=\frac{\partial f}{\partial x^i}$。经过平移，我们可以把坐标原点选在 M 的仿射中心。我们知道，M 的 Blaschke 度量为

$$G=\sum\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^idx^j$$

$$=\sum\left[\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}d\xi^id\xi^j. \tag{21}$$

由于 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)$ 与 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)$ 互逆，因此有

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)=\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)^{-1}. \tag{22}$$

通过 A^{n+1} 中的欧氏内积，M 的仿射法矢可等同于

$$U=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\left(-\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,-\frac{\partial f}{\partial x^n},1\right) \tag{23}$$

取 $b=(0,\cdots,0,1)$。由公式 $\Delta\langle U,b\rangle=-nL_1\langle U,b\rangle$，我们得到

$$\Delta\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}=-nL_1\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}},\qquad(24)$$

式中 Δ 是关于 Blaschke 度量的拉普拉斯算子。由于 M 是双曲型仿射球，

$$\frac{1}{L_1u}=\left[\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\qquad(25)$$

因此

$$\Delta\left(\frac{1}{L_1u}\right)=-nL_1\left(\frac{1}{L_1u}\right).\qquad(26)$$

为了估计 $\left\|\nabla\frac{1}{u}\right\|$，我们先建立任意完备黎曼流形上的一个结果（参看[Ya-S]，p. 27 系 1.3.5）。

定理 4.3 设 M 是李奇曲率有下界 $-K(K\geqslant0)$ 的完备黎曼流形，Φ 是 M 上的正值 C^2 函数，它满足方程

$$\Delta\Phi=\lambda\Phi.$$

其中 λ 为常数，则存在常数 $C>0$，使

$$\frac{\|\nabla\Phi\|}{\Phi}\leqslant C,\quad\forall x\in M.\qquad(27)$$

证明 在 M 上选取局部单位正交标架场，记 Φ 关于这场标架的协变微商为 Φ_i、Φ_{ij} 等。由李奇恒等式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla\Phi\|^2)&=\sum\Phi_{ij}^2+\sum\Phi_i(\Delta\Phi)_i+\sum R_{ij}\Phi_i\Phi_j\\&\geqslant\sum\Phi_{ij}^2+(\lambda-K)\|\nabla\Phi\|^2\end{aligned}$$

对于固定的点 $x_0\in M$，适当选取 x_0 附近的正交标架场，可设 $\Phi_i(x_0)=0\,(i\geqslant2)$，$\Phi_1(x_0)=\|\nabla\Phi\|(x_0)$，所以在该点

$$\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2=\sum\Phi_{1j}^2$$

因此

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla\Phi\|^2)-\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2-(\lambda-K)\|\nabla\Phi\|^2$$

$$\geqslant \sum \Phi_{ij}^2 - \sum \Phi_{1j}^2 \geqslant \sum_{i\neq 1} \Phi_{i1}^2 + \sum_{i\neq 1} \Phi_{ii}^2$$

$$\geqslant \sum_{i\neq 1} \Phi_{i1}^2 + \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i>1} \Phi_{ii}\Big)^2$$

$$\geqslant \sum_{i\neq 1} \Phi_{i1}^2 + \Big(\frac{1}{n-1} - \delta\Big)\Phi_{11}^2 - \frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}(\Delta\Phi)^2$$

$$\geqslant \Big(\frac{1}{n-1} - \delta\Big)\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2 - \frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2\Phi^2,$$

其中 δ 为小于$\frac{1}{n-1}$的任意正数。由

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla\Phi\|^2) = \|\nabla\Phi\|\Delta(\|\nabla\Phi\|) + \|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2$$

可得

$$\|\nabla\Phi\|\Delta(\|\nabla\Phi\|) \geqslant \Big(\frac{1}{n-1} - \delta\Big)\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2$$

$$- \frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2\Phi^2 + (\lambda - K)\|\nabla\Phi\|^2$$

令 $\Psi = \frac{\|\nabla\Phi\|}{\Phi}$，并估计$\frac{\Delta\Psi}{\Psi}$。首先

$$\nabla\Psi = \frac{\nabla\|\nabla\Phi\|}{\Phi} - \frac{\|\nabla\Phi\|\nabla\Phi}{\Phi^2}$$

由 $\|\nabla\Phi\| = \Psi\Phi$，在 $\|\nabla\Phi\| \neq 0$ 的点

$$\begin{aligned}\Delta\|\nabla\Phi\| &= \Phi\Delta\Psi + \Psi\Delta\Phi + 2\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\\ &= \Phi\Delta\Psi + \lambda\Phi\Psi + 2\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\end{aligned}$$

$$\Delta\Psi = \frac{\Delta\|\nabla\Phi\|}{\Phi} - \lambda\Psi - \frac{2\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Phi}$$

$$= \frac{\|\nabla\Phi\|\Delta\|\nabla\Phi\|}{\|\nabla\Phi\|\Phi} - \lambda\Psi - \frac{2\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Phi}$$

$$\geqslant \frac{1}{\Phi\|\nabla\Phi\|}\Big(\Big(\frac{1}{n-1} - \delta\Big)\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2 - \frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2\Phi^2$$

$$+(\lambda-K)\|\nabla\Phi\|^2)-\lambda\Psi-2\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Phi}$$

$$\geqslant(\frac{1}{n+1}-\delta)\frac{\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2}{\|\nabla\Phi\|\Phi}-\frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2\frac{1}{\Psi}$$

$$-K\Psi-2\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Phi}$$

取 $\varepsilon=2\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)$，则有

$$-2\frac{\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi}{\Phi}=-(2-\varepsilon)\frac{\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi}{\Phi}-\varepsilon\frac{\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi}{\Phi}$$

$$=-(2-\varepsilon)\frac{\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi}{\Phi}-\varepsilon\frac{\nabla\|\nabla\Phi\|\cdot\nabla\Phi}{\Phi^2}+\varepsilon\frac{\|\nabla\Phi\|^3}{\Phi^3}$$

$$\geqslant-(2-\varepsilon)\frac{\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi}{\Phi}-\varepsilon\frac{\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|\,\|\nabla\Phi\|}{\Phi^2}+\varepsilon\Psi^3,$$

但

$$-\varepsilon\frac{\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|\,\|\nabla\Phi\|}{\Phi^2}=-\varepsilon\frac{\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|}{(\|\nabla\Phi\|\Phi)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\|\nabla\Phi\|^{\frac{3}{2}}}{\Phi^{\frac{3}{2}}}$$

$$\geqslant-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2}{\|\nabla\Phi\|\Phi}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\|\nabla\Phi\|^3}{\Phi^3}$$

$$=-\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)\frac{\|\nabla\|\nabla\Phi\|\|^2}{\Phi\|\nabla\Phi\|}-(\frac{1}{n-1}-\delta)\Psi^3$$

因此，我们得到

$$\frac{\Delta\Psi}{\Psi}\geqslant-K-2\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right)\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Psi\Phi}-\frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2\frac{1}{\Psi^2}$$

$$+\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)\Psi^2. \tag{28}$$

考虑函数

$$F(x)=(a^2-r^2)\Psi=(a^2-r^2)\frac{\|\nabla\Phi\|}{\Phi},$$

式中 r 是从某固定点 $p\in M$ 算起的测地距离函数。显然 $F(x)$ 在测地球 $B(a)=\{x\in M\,|\,r(x)\leqslant a\}$ 内部某点 x_1 处达到最大值。设在该

点$\nabla\Phi\neq 0$(若在该点$\nabla\Phi=0$,结论显然成立),象在§3中一样,可以假定r^2在该点可微,则在点x_1有

$$\frac{\nabla r^2}{a^2-r^2}=\frac{\nabla\Psi}{\Psi},\tag{29}$$

$$-\frac{\Delta r^2}{a^2-r^2}+\frac{\Delta\Psi}{\Psi}-\frac{2\nabla r^2\cdot\nabla\Psi}{(a^2-r^2)\Psi}\leqslant 0.\tag{30}$$

把(29)代入(30),并利用$\Delta r^2\leqslant C_0(1+\sqrt{K}r)$和$\|\nabla r\|=1$,可得

$$\frac{\Delta\Psi}{\Psi}-\frac{C_0(1+\sqrt{K}r)}{a^2-r^2}-\frac{8r^2}{(a^2-r^2)^2}\leqslant 0,\tag{31}$$

其中C_0是仅仅依赖于n的正常数(参看§3中的(37)式),把(28)代入(31)得

$$-K-2\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right)\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Phi\Psi}-\frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2\frac{1}{\Psi^2}$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)\Psi^2-\frac{C_0(1+\sqrt{K}r)}{a^2-r^2}-\frac{8r^2}{(a^2-r^2)^2}\leqslant 0\tag{32}$$

由(29),在点x_1我们有

$$-\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi}{\Phi\Psi}=-\frac{2r\nabla r\cdot\nabla\Phi}{(a^2-r^2)\Phi}$$
$$\geqslant-\frac{2r\Psi}{a^2-r^2}\geqslant-\left(\delta_1\Psi^2+\frac{r^2}{\delta_1(a^2-r^2)^2}\right).$$

其中δ_1为任意正常数。把上式代入(32)得

$$-K-2\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right)\delta_1\Psi^2-2\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right)\frac{r^2}{\delta_1(a^2-r^2)^2}$$
$$-\frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\frac{\lambda^2}{\Psi^2}+\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)\Psi^2$$
$$-\frac{C_0(1+\sqrt{K}r)}{a^2-r^2}-\frac{8r^2}{(a^2-r^2)^2}\leqslant 0.$$

取δ_1使

$$\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)>2\delta_1\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right).$$

记

$$C_1=\left(\frac{1}{n-1}-\delta\right)-2\delta_1\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right),$$

$$C_2=2\left(1-\frac{1}{n-1}+\delta\right)\frac{1}{\delta_1},$$

$$C_3=\frac{1-\delta(n-1)}{\delta(n-1)^2}\lambda^2.$$

由 δ 和 δ_1 的取法，C_1、C_2、C_3 都是正数，因此有

$$-K-C_2\frac{r^2}{(a^2-r^2)^2}-C_3\frac{1}{\Psi^2}+C_1\Psi^2-\frac{C_0(1+\sqrt{K}r)}{a^2-r^2}$$
$$-\frac{8r^2}{(a^2-r^2)^2}\leqslant 0$$

或

$$C_1F^4-(K(a^2-r^2)^2+C_2r^2+C_0(1+\sqrt{K}r)(a^2-r^2)+8r^2)F^2$$
$$-C_3(a^2-r^2)^4\leqslant 0. \tag{33}$$

我们有

$$C_1F^4-(Ka^4+C_2a^2+C_0(1+\sqrt{K}a)a^2+8a^2)F^2-C_3a^8\leqslant 0.$$

因此，F^2 小于上面关于 F^2 的二次方程的大根，即

$$F^2\leqslant\frac{Ka^4+C_2a^2+C_0(1+\sqrt{K}a)a^2+8a^2}{2C_1}$$
$$+\frac{\sqrt{[Ka^4+C_2a^2+C_0(1+\sqrt{K}a)a^2+8a^2]^2+4C_1C_3a^8}}{2C_1}$$
$$\leqslant\frac{Ka^4+C_2a^2+C_0(1+\sqrt{K}a)a^2+8a^2}{C_1}+\frac{\sqrt{C_2C_3}}{C_1}a^4.$$

由于 F 在 x_1 点达到最大值，因此对 $B(a)$ 内任一点 x 有

$$(a^2-r^2)^2\frac{\|\nabla\Phi\|^2}{\Phi^2}$$
$$\leqslant\frac{Ka^4+C_2a^2+C_0(1+\sqrt{K}a)a^2+8a^2)}{C_1}+\frac{\sqrt{C_1C_3}}{C_1}a^4. \tag{34}$$

两端除以$(a^2-r^2)^2$,固定点x,令$a\to\infty$,有

$$\frac{\|\nabla\Phi\|^2}{\Phi^2}\leqslant\frac{K}{C_1}+\frac{\sqrt{C_1C_3}}{C_1},\quad \forall x\in M.$$

因此(27)成立。证毕。

由(26)和定理4.3可知,存在常数C使在M上

$$\frac{\left\|\nabla\left(\frac{1}{L_1u}\right)\right\|}{\frac{1}{L_1u}}\leqslant C,$$

即

$$\frac{\|\nabla u\|}{|u|}\leqslant C. \tag{35}$$

定理4.4　设M是A^{n+1}中一个凸的、仿射完备的双曲型仿射球,则M是欧氏完备的。

证明　把M的仿射中心取为坐标原点O,在M上取一点x_0,过x_0作M的切超平面Π_{x_0}。经过适当幺模仿射变换,我们可假定过x_0和O的直线Ox_0垂直于Π_{x_0}。我们取Ox_0作为x^{n+1}轴,坐标面$A^n=\{x\in A^{n+1}|x^{n+1}=0\}$平行$\Pi_{x_0}$,且使$x_0$的坐标为$(0,\cdots,0,1)$。我们证明任一平行于$x^{n+1}$轴的直线与$M$最多只交于一点,从而$M$是整体定义在$A^n$上的图。设某一条平行于$x^{n+1}$轴的直线与$M$交于两点$p_1$和$p_2$,设$p_2$在$p_1$的上方。过$p_2$作$M$的切超平面$\Pi_{p_2}$,由于$M$的整体凸性,$\Pi_{p_2}$不平行于$x^{n+1}$轴,且$M$落在$\Pi_{p_2}$的一边。由于$p_1$落在$\Pi_{p_2}$的"下方"(我们称$x^{n+1}=-\infty$所在的一方为下方),因此$x_0$也落在$\Pi_{p_2}$的下方,从而仿射中心落在$\Pi_{p_2}$的下方。这样$p_2$点的位置矢指向$M$凸的一边。由此推出$M$在$p_2$点的仿射法矢指向$M$凸的一边。这是不可能的,因为仿射法矢总是指向曲面凹的一边。因此M可看成是定义在A^n的某区域Ω上的严格凸的正值函数$f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$的图。容易看出,原点O是Ω的内点。现在我们证明$\Omega=A^n$。若不然,设Ω有有限的边界,则$\partial\Omega$上存在一个到点O的欧

氏距离最近的点 $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\cdots,\bar{x}^n)$，作直线段

$$x^i(t)=\bar{x}^i t,\quad 0\leqslant t<1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

则该直线段全部落在 Ω 中，由于 M 是仿射完备的，当 $t\to 1$ 时，M 上的曲线

$$(x^1(t),\cdots,x^n(t),\quad f(x^1(t),\cdots,x^n(t)))$$

的仿射弧长应趋于∞。下面我们计算这个仿射弧长。为此我们先计算 f 的 Legendre 变换函数 u 的梯度

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2&=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}\sum f^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j}\\&=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}\sum f_{ij}\frac{\partial u}{\partial \xi^i}\frac{\partial u}{\partial \xi^j}\\&=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{\frac{2}{n+2}}\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\sum f_{ij}x^ix^j\\&=(L_1u)^2\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\sum f_{ij}x^ix^j,\end{aligned}$$

其中 $f_{ij}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$，$(f^{ij})$ 是 (f_{ij}) 的逆。该曲线的仿射弧长为

$$\begin{aligned}l&=\int_0^1\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\sum f_{ij}\bar{x}^i\bar{x}^j\right\}^{\frac{1}{2}}dt\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1.\end{aligned}$$

上式第一部份是有界的，现在估计第二部份。

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{1}{2}}^1\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\sum f_{ij}\bar{x}^i\bar{x}^j\right\}^{\frac{1}{2}}dt\\&=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{t}\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\sum f_{ij}x^ix^j\right\}^{\frac{1}{2}}dt\\&=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{L_1ut}\|\nabla u\|\,dt\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{C}{|L_1|}\ln 2.$$

上面的不等式是由于(35)。这说明该曲线的仿射弧长是有界的，我们得到一个矛盾。因此 $\Omega = A^n$，从而 M 是欧氏完备的。证毕。

Calabi 猜测的第一部份在凸曲面的假定下的回答是

定理 4.5　A^{n+1} 中每一个凸的、仿射完备的双曲型仿射球都渐近于它和它的仿射中心所决定的凸锥的边界。

第三章　刚性与唯一性定理

本章研究 A^{n+1} 中的局部严格凸超曲面在保 Blaschke 度量或仿射第三基本形式的对应下的刚性问题，以及由各阶仿射平均曲率、Pick 不变量、Blaschke 度量的黎曼曲率张量所刻画的唯一性定理。

§1　闵可夫斯基积分公式的仿射类似及其应用

1.1 积分公式

在欧氏空间的凸曲面的刚性和唯一性问题的研究中，闵可夫斯基积分公式起着重要的作用。在本节中，我们将用陈省身在[Cher-3]中创立的技巧来导出 A^{n+1} 中超曲面的类似积分公式。

设 $x:M\to A^{n+1}$ 是紧致严格凸的超曲面（有边或无边）。在 M 上选取局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使 $e_1,\cdots,e_n\in T_xM$，e_{n+1} 沿着 M 在 x 点的仿射法线方向，并且 $G_{ij}=\delta_{ij}$，这时 $e_{n+1}=Y$。我们引入以下微分形式（式中 r 表示 dY 的个数）：

$$A_r=[x,Y,dY,\cdots,dY,dx,\cdots,dx],\qquad(1)$$

$$D_r=[Y,dY,\cdots,dY,dx,\cdots,dx],\qquad(2)$$

上面有向体积中的元素是向量或向量值的微分形式，它们的值可用这些元素在任一幺模仿射标架下的分量组成的 $(n+1)$ 阶行列式来计算。在计算这类行列式时，我们约定一律按列展开，并且微分

式的乘法按外积相乘。例如

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega_3^1 \\ \omega^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix} = \omega^1 \wedge \omega_3^2 - \omega^2 \wedge \omega_3^1.$$

由行列式的性质和外积的性质不难看出，当上面有向体积中任意两向量或一向量与一向量值的微分形式交换位置时，有向体积的值变号，而当两向量值的微分形式交换位置时，有向体积的值不变。

外微分(1)，利用两次外微分为零的事实，我们得到

$$dA_r = -pD_{r+1} - D_r, \quad r = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{3}$$

式中 $p=\langle U, -x\rangle$ 是关于原点的支撑函数。利用斯托克斯定理，我们得到

$$\int_M (pD_{r+1} + D_r) = -\int_{\partial M} A_r, \tag{4}$$

$$r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

下面，我们具体计算 D_r，把

$$dx = \sum \omega^i e_i,$$

$$dY = \sum \omega_{n+1}^i e_i = -\sum l^{ij}\omega^j e_i$$

代入(2)，利用行列式的性质可得

$$D_r = (-1)^{n+r} n! L_r dV, \tag{5}$$

式中 $dV=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 是 M 关于 Blaschke 度量的体积元。我们得到以下的积分公式：

$$\int_M (L_r - pL_{r+1})dV = (-1)^{n+r+1} n! \int_{\partial M} A_r, \tag{6}$$

$$r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

特别，当 M 是紧致无边时，则有

$$\int_M (L_r - pL_{r+1})dV = 0, \tag{7}$$

$$r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

1.2 椭球的若干整体特征

定义 1.1 A^{n+1} 中一个连通的、紧致无边的、严格凸的超曲面被称为卵形面。

定理 1.1 设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面。若在 M 上 L_1=常数，则 $x(M)$ 是椭球。

证明 由积分公式(7)，我们有

$$\int_M (L_1 - pL_2)dV = 0,$$

$$\int_M (1 - pL_1)dV = 0.$$

由于 L_1=常数，用 L_1 乘上面的第二式，再减去第一式，我们得到

$$\int_M p(L_1^2 - L_2)dV = 0.$$

由于 $x(M)$ 是卵形面，当我们把原点选在 $x(M)$ 的内部时，有 $p>0$ 处处成立。利用不等式

$$L_1^2 \geqslant L_2,$$

我们得到

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n.$$

因此，$x(M)$ 是紧致无边的仿射球，从而是一个椭球。证毕。

要把上面的定理推广到高阶仿射平均曲率，我们需要假定 $L_r>0$ 在 M 上处处成立。我们先建立下面定理。

定理 1.2 设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面，则在 M 上至少存在一点 x_0，使在该点的仿射主曲率

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \cdots, \quad \lambda_n > 0.$$

证明 我们把原点选在 $x(M)$ 的内部，考虑仿射支撑函数 $p=\langle U, -x\rangle$。它必在 M 的某点 x_0 处达到最大值。在点 x_0 有

$$p_i = \langle U_i, -x\rangle = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{8}$$

上式说明 $x_0 // Y(x_0)$。令 $x_0 = aY(x_0)$。由于仿射法矢总指向曲面凹的一侧，我们有 $a<0$。我们进一步计算 p_i 的协变微商：

$$p_{ij}=\langle U_{,ij},-x\rangle+\langle U_{,i},-x_j\rangle. \tag{9}$$

由第一章§7中的(9)，有

$$U_{,ij}=-\sum A_{ijk}U_k-B_{ij}U. \tag{10}$$

由于 $x_0 /\!/ Y(x_0)$，把(10)代入(9)，注意到 $\langle U_i,x_j\rangle=-G_{ij}=-\delta_{ij}$，在点 x_0 得到

$$p_{ij}=aB_{ij}+\delta_{ij}.$$

由于 $a<0$ 和 (p_{ij}) 在点 x_0 负定，我们得到 (B_{ij}) 在点 x_0 正定，即在点 x_0，$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$。证毕。

定理 1.3　设 $x:M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面。若在 M 上 $L_n>0$，则在 M 上 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$。

证明　用反证法。设存在一点 x_1 使 $\lambda_1<0$，由定理 1.2，M 上存在一点 x_0 使 $\lambda_1>0$，由连续性，必存在点 x_2 使 $\lambda_1=0$，从而在点 x_2 有 $L_n=0$，这与已知条件矛盾。证毕。

定理 1.4　设 $x:M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面，并且在 M 上 $L_n>0$。若存在某个整数 r，$2\leqslant r\leqslant n$，使在 M 上 $L_r=$ 常数，则 $x(M)$ 是椭球。

证明　分两种情形讨论。

1)　$r\leqslant n-1$。利用积分公式(7)以及 $L_r=$ 常数，我们可以导出

$$\int_M p(L_1L_r-L_{r+1})dV=0.$$

利用不等式

$$L_1L_r\geqslant L_{r+1},$$

可以完成证明。

2)　$r=n$。设 $(L_n)^{\frac{1}{n}}=C$，我们有以下不等式(参看[Ha-L-P])

$$L_1\geqslant(L_2)^{\frac{1}{2}}\geqslant\cdots\geqslant(L_n)^{\frac{1}{n}}=C.$$

由积分公式(7)，我们得到

$$\int_M L_n p dV=\int_M L_{n-1}dV\geqslant C^{n-1}\int_M dV.$$

另一方面，把坐标原点取在 $x(M)$ 的内部，则 $p>0$，我们有

$$\int_M pL_n dV = C^{r-1}\int_M p(L_n)^{\frac{1}{n}} dV \leqslant C^{n-1}\int_M pL_1 dV = C^{n-1}\int_M dV.$$

因此

$$(L_n)^{\frac{1}{n}} = L_1,$$

这只有当 $\lambda_1=\lambda_2\cdots=\lambda_n$ 时才可能，证毕。

定理 1.5　设 $x: M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面，并且在 M 上 $L_n>0$。若存在整数 r，$2\leqslant r\leqslant n$，以及常数 $C_j\geqslant 0$，$1\leqslant j\leqslant r-1$，使在 M 上

$$L_r=\sum_{j=1}^{r-1} C_j L_j,$$

则 $x(M)$ 是椭球。

证明　利用不等式

$$\frac{L_j}{L_r}-\frac{L_{j-1}}{L_{r-1}}\geqslant 0,$$

可得

$$1=\sum_{j=1}^{r-1} C_j\left(\frac{L_j}{L_r}\right)\geqslant \sum_{j=1}^{r-1} C_j\left(\frac{L_{j-1}}{L_{r-1}}\right),$$

即

$$L_{r-1}-\sum_{j=1}^{r-1} C_j L_{j-1}\geqslant 0.$$

利用积分公式(7)可得

$$\int_M \left(L_{r-1}-\sum_{j=1}^{r-1} C_j L_{j-1}\right) dV=\int_M p\left(L_r-\sum_{j=1}^{r-1} C_j L_j\right) dV=0.$$

因此

$$L_{r-1}=\sum_{j=1}^{r-1} C_j L_{j-1}.$$

这只有当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时才成立。证毕。

利用积分公式(7)还可以证明椭球的另一些特征，详细的请参看[Hs-S]、[Si 2]。

当 $x: M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面，并且在 M 上 $L_n>0$ 时，令

$$R_1=\frac{1}{\lambda_1},R_2=\frac{1}{\lambda_2},\cdots,R_n=\frac{1}{\lambda_n},$$

$$Q_r=\frac{1}{\binom{n}{r}}\sum R_{i_1}R_{i_2}\cdots R_{i_r},$$

$$r=1,2,\cdots,n,\quad Q_0:=1.$$

记 $dA=\omega^1{}_{n+1}\wedge\omega^2{}_{n+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n{}_{n+1}$. 积分公式(7)可以写成

$$\int_M(Q_{r+1}-pQ_r)dA=0,$$

$$r=0,1,\cdots,n-1.$$

因此在上面诸定理中，若把 L_r 换成 Q_r，结论仍然成立。

1.3　一类椭圆型微分方程的整体解

为了研究卵形面在仿射等距下的刚性问题，我们先研究卵形面上一个椭圆型偏微分方程的整体解。

定理 1.6　设 $x:M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面，f 是 M 上的光滑函数。若 f 满足微分方程

$$\Delta f=-nL_1f,$$

则存在常向量 $a\in A^{n+1}$，使 $f=\langle U,a\rangle$。

证明　在 M 上选取局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in T_xM$，$G_{ij}=\delta_{ij}$，$e_{n+1}=Y$。令

$$df=\sum f_i\omega^i,\tag{11}$$

构造 M 上的一个向量场

$$a=-\sum f_ie_i+fe_{n+1},\tag{12}$$

显然它是整体存在的。我们有

$$<U,a>=f.\tag{13}$$

下面我们证明 a 是常向量。从(12)得到

$$da = -\sum df_i e_i - \sum f_i \omega_i^j e_j - \sum f_i \omega_i^{n+1} e_{n+1}$$
$$+ df e_{n+1} + f\sum \omega_{n+1}^i e_i$$
$$= \sum(-f_{ri} - \sum f_m A_{imr} - fB_{ri})\omega^i e_r,$$

因此 $da \in T_x M$。令

$$da = \sum T_{ri}\omega^i e_r,$$

其中

$$T_{ri} = -f_{ri} - \sum f_s A_{irs} - fB_{ri}.$$

显然

$$\sum T_{ii} = -(\Delta f + nL_1 f) = 0.$$

下面我们证明 $T_{ri}=0$。易见 $T_{ri}=T_{ir}$。我们引进以下微分形式：

$$\theta=[x,a,da,dx,\cdots,dx],$$

则

$$d\theta=[x,da,da,dx,\cdots,dx]-[a,da,dx,\cdots,dx].$$

由于 da、dx 切于 M，我们有

$$[x,da,da,dx,\cdots,dx]=\langle U,x\rangle[e_{n+1},da,da,dx,\cdots,dx],$$
$$[a,da,dx,\cdots,dx]=\langle U,a\rangle[e_{n+1},da,dx,\cdots,dx],$$

将 $dx=\Sigma\omega^i e_i$、$da=\Sigma T_{ri}\omega^r e_i$ 代入上面的微分式，直接计算我们得到以下积分公式：

$$\int_M \langle U,x\rangle S_2 dV = \int_M \langle U,a\rangle S_1 dV,$$

式中 S_1、S_2 分别表示(T_{ri})的特征根的的第一、二阶初等对称多项式。由于 $S_1=\frac{1}{n}\sum T_{ii}=0$，因此

$$\int_M \langle U,x\rangle S_2 dV = 0. \qquad (*)$$

选原点在曲面内部，则仿射支撑函数 $p=-\langle U,x\rangle>0$，而 $S_2\leqslant S_1^2=0$。由上面的$(*)$式可得 $S_2=0$，从而 $T_{ri}=0$。这说明 a 是常矢。证

毕。

考虑中心仿射法化的情形。用与上面完全相同的方法可以证明下面的定理。

定理 1.7　设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面。把原点选在 $x(M)$ 的内部，考虑中心仿射法化 $Y=-x$。设 f 是 M 上的光滑函数，满足以下微分方程

$$\Delta f + n\sum V^i f_i + nf = 0,$$

其中 V^i 是 Tschebyschew 向量场，Δ 是关于中心仿射度量的拉普拉斯算子．则存在常矢 $a \in A^{n+1}$，使

$$f = \langle U, a \rangle,$$

其中 U 是中心仿射法化超曲面 $x(M)$ 上的余法矢量场．

定理 1.6 当 $n=2$ 时是 Blaschke 证明的(参看[Bls-2])。Schneider 把它推广到高维以及更一般的相对微分几何。

1.4　卵形面的刚性定理

我们现在利用定理 1.6、定理 1.7 证明(等积)仿射微分几何中的几个刚性定理。

定理 1.8　设 $x, \bar{x}: M \to A^{n+1}$ 是两个卵形面，若在对应点有 $G=\bar{G}, L_1=\bar{L}_1$．则存在 A^{n+1} 中的一个幺模仿射变换 σ 使 $\bar{x}=\sigma \circ x$。

证明　设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n+1}$ 是 A^{n+1} 中固定的幺模仿射标架。则

$$\Delta\langle U, \eta_A\rangle = -nL_1\langle U, \eta_A\rangle, \quad A=1,2,\cdots,n+1.$$

由条件 $\bar{G}=G$，$\bar{L}_1=L_1$，我们有

$$\Delta\langle \bar{U}, \eta_A\rangle = -nL_1\langle \bar{U}, \eta_A\rangle,$$

式中 $\bar{U}$ 是 $\bar{x}(M)$ 上的仿射余法矢量场。由定理 1.6，存在常矢 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+1}$，使

$$\langle \bar{U}, \eta_A\rangle = \langle U, \xi_A\rangle,$$

$$A=1,2,\cdots,n+1.$$

显然 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+1}$ 是线性无关的。因为若存在不全为零的常数

$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，使

$$\sum a_A \xi_A = 0,$$

则

$$< \overline{U}, \sum a_A \eta_A > = \sum a_A < \overline{U}, \eta_A >$$
$$= \sum a_A < U, \xi_A > = < U, \sum a_A \xi_A > = 0,$$

这说明 $\Sigma a_A \eta_A$ 与 $\bar{x}(M)$ 在每点相切，因此，必有

$$\sum a_A \eta_A = 0,$$

这与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n+1}$ 的线性无关性矛盾。令

$$\xi_A = \sum c_A^B \eta_B,$$

则

$$< \overline{U}, \xi_A > = \sum c_A^B < \overline{U}, \eta_B > = \sum c_A^B < U, \xi_B > . \qquad (14)$$

把 $C = (c_A^B)$ 考虑成一个线性变换 $C: A^{n+1} \to A^{n+1}$，令 $C^*: A^{n+1*} \to A^{n+1*}$ 是它的对偶变换，则(14)说明

$$\overline{U} = C^* U. \qquad (15)$$

作曲面

$$\tilde{x} = |\det(C)|^{-\frac{1}{n-1}} C\bar{x}, \qquad (16)$$

则

$$\tilde{Y} = |\det(C)|^{-\frac{1}{n-1}} C\overline{Y}.$$

由于

$$< \overline{U}, \overline{Y} > = 1 = < \tilde{U}, \tilde{Y} > = |\det(C)|^{-\frac{1}{n+1}} \langle \tilde{U}, C\overline{Y} \rangle$$
$$= |\det(C)|^{-\frac{1}{n-1}} \langle C^* \tilde{U}, \overline{Y} \rangle,$$
$$\langle \overline{U}, \bar{x}_i \rangle = 0 = < \tilde{U}, \tilde{x}_i > = |\det(C)|^{-\frac{1}{n-1}} \langle C^* \tilde{U}, \bar{x}_i \rangle,$$

我们有

$$\overline{U} = |\det(C)|^{-\frac{1}{n+1}} C^* \tilde{U} \qquad (17)$$

与(15)相比较，我们得到

$$\tilde{U} = |\det(C)|^{\frac{1}{n+2}}U \tag{18}$$

由于

$$\tilde{G}_{ij}=\overline{G}_{ij}=G_{ij},$$

式中 $\tilde{G}_{ij}$、$\overline{G}_{ij}$、G_{ij} 是 $\tilde{G}$、$\overline{G}$、G 关于某标架场的分量，我们有

$$<\tilde{U}_i,\tilde{x}_j>=<U_i,x_j>,$$

因此

$$x_j=|\det(C)|^{\frac{1}{n+2}}\tilde{x}_j$$

从而

$$x = |\det(C)|^{\frac{1}{n+2}}\tilde{x} + b, \tag{19}$$

式中 b 是一固定矢量。将(16)代入(19)，可得

$$x=C\tilde{x}+b.$$

由于这个仿射变换保 Blaschke 度量，我们有

$$\det(C)=1.$$

证毕。

在欧氏空间凸曲面理论中，有一个著名的闵可夫斯基平移性定理。这个定理还有其仿射几何意义。具体地说，有下面定理：

定理 1.9　设 x、$\bar{x}: M\to A^{n+1}$ 是两个卵形面，若在对应点有 $Y=\overline{Y}$，则存在 A^{n+1} 中的平移 σ，使 $\bar{x}=\sigma\circ x$。

证明　由条件 $Y=\overline{Y}$ 可知在对应点 $x(M)$ 与 $\bar{x}(M)$ 有相同的切空间。我们在 A^{n+1} 中引进一欧氏内积“$\cdot$”，使 $(A^{n+1},\cdot)$ 成为一欧氏空间。这时 $x(M)$ 与 $\bar{x}(M)$ 在对应点有相同的欧氏法向量。在 $x(M)$ 上选取欧氏标准正交标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使 $e_1,\cdots,e_n$ 在点 x 与 $x(M)$ 相切，则它在点 $\bar{x}$ 也与 $\bar{x}(M)$ 相切。由 $Y=\overline{Y}$ 可知 $U=\overline{U}$。设 K、$\overline{K}$ 分别表示 $x(M)$ 与 $\bar{x}(M)$ 的高斯曲率，则

$$K^{-\frac{1}{n+2}}e_{n+1}=U=\overline{U}=\overline{K}^{-\frac{1}{n+2}}e_{n+1},$$

即 $K=\overline{K}$。由闵可夫斯基平移性定理可知 $x(M)$ 与 $\bar{x}(M)$ 相差一平

移。证毕。

定理 1.10 设 x、$\bar{x}: M\to A^{n+1}$ 是两个卵形面，若在对应点 $\bar{B}=B$，$\bar{L}_n=L_n>0$，则存在 A^{n+1} 中的一个幺模仿射变换 σ，使 $\bar{x}=\sigma\circ x$。

证明 由定理 1.3，从 $L_n=\bar{L}_n>0$ 可知 $B=\bar{B}$ 是严格正定的。考虑 $x(M)$ 和 $\bar{x}(M)$ 的仿射法矢像 $Y(M)$ 和 $\bar{Y}(M)$，它们都是卵形面，都具有中心仿射法化。由于 $L_n=\bar{L}_n$，由第一章 § 10 中的公式(39)可知，它们的 Tschebyschew 向量场相等，即 $T^*=\bar{T}^*$。利用定理 1.7，用证明定理 1.8 同样的方法可证 $Y(M)$ 与 $\bar{Y}(M)$ 相差 A^{n+1} 中的一个仿射变换 σ，即 $\bar{Y}=\sigma\circ Y$。作超曲面 $\tilde{x}=\sigma\circ x$，则 $\tilde{Y}=\bar{Y}$。由定理 1.9，$\tilde{x}(M)$ 与 $\bar{x}(M)$ 相差 A^{n+1} 中一个平移。因此，$x(M)$ 与 $\bar{x}(M)$ 相差 A^{n+1} 中一个仿射变换 σ。由于 $\bar{L}_n=L_n$，这个仿射变换必是幺模的。证毕。

以上几个刚性定理取材于 Schneider 的文章[Schn-1]。

1.5 关于带边超曲面的某些结果①

我们先证明 Schneider 的以下结果：

定理 1.11 设 $x: M\to A^{n+1}$ 是紧致带边的仿射球，若在边界上 $J=0$，则 $x(M)$ 是二次超曲面的一部份。

证明 分两种情况讨论：

1) $L_1>0$ 或 $L_1=0$。利用第二章 § 3 中的不等式(10)，我们有

$$\frac{1}{2}n(n-1)\Delta J\geqslant\sum A^2_{ijk,l}+(n-1)n(n+1)J(J+L_1)\geqslant 0,$$

即 J 是 M 上的次调和函数，J 的最大值必在边界点上达到，从而 $J=0$ 处处成立。因此 $x(M)$ 是二次超曲面的一部份。

2) $L_1<0$. 把坐标原点选在 $x(M)$ 的中心，这时 $Y=-L_1x$。在 M 上选局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使 e_1、$\cdots$、$e_n\in T_xM$，

① 本书所说的边界都假定是光滑边界。

$G_{ij}=\delta_{ij}, e_{n+1}=Y$. 设 $b\in A^{n+1*}$ 是一固定的余向量，则 $f=<b,x>$是 M 上的光滑函数。我们有

$$df=<b,\sum\omega^i e_i>=\sum<b,e_i>\omega^i,$$

即

$$f_i=<b,e_i>.$$

由

$$df_i=<b,\sum\omega_i^j e_j+\omega_i^{n+1}e_{n+1}>,$$

我们得到

$$\begin{aligned}f_{ij}&=\sum A_{ijl}f_l+\delta_{ij}<b,Y>\\&=\sum A_{ijl}f_l-L_1\delta_{ij}<b,x>,\end{aligned}$$

因此

$$\Delta f=-nL_1f.$$

在 $x(M)$上定义一个向量场

$$a=\sum f_ie_i-fY,$$

则

$$<U,a>=-f.$$

我们现在证明 a 是常矢。因为

$$da=\sum T_{ij}\omega^i e_j,$$

其中

$$T_{ij}=f_{ij}+\sum A_{ijl}f_l+L_1\delta_{ij}f=2\sum A_{ijl}f_l,$$

因此在 M 上 $\Sigma T_{ii}=0$,在 ∂M 上 $T_{ij}=0$。与定理 1.6 的证明一样，我们能够得到以下积分公式：

$$\int_M<U,x>S_2dV-\int_M<U,a>S_1dV=\int_{\partial M}\theta,$$

式中 S_1、S_2 和 θ 的定义同定理 1.6 的证明中的一样。由于在边界上 $da=\sum T_{ij}\omega^i e_j=0$,从而在 ∂M 上，$\theta=0$。我们有

$$\int_M \langle U, x\rangle S_2 dV = \int_M \langle U, a\rangle S_1 dV.$$

由 $S_1=0$ 和 $\langle U,x\rangle=-\frac{1}{L_1}>0$ 可得 $S_2=0$，从而 $T_{ij}=0$，即 $a=$常矢。即存在常矢 $a\in A^{n+1}$ 使

$$\langle b,x\rangle=-\langle U,a\rangle. \tag{20}$$

我们在 A^{n+1} 中引进内积"·"，使 A^{n+1*} 与 A^{n+1} 等同，使 $\langle,\rangle$: $A^{n+1*}\times A^{n+1}\to R$ 与内积"·"等同。这时(20)表明存在非退化的矩阵 C，使

$$U=Cx.$$

因此

$$\langle Cx,x\rangle=\langle U,x\rangle=\langle U,-\frac{1}{L_1}Y\rangle$$

$$=-\frac{1}{L_1}=\text{常数}.$$

上式表明 $x(M)$是二次曲面的一部份。证毕。

为了把 R. Schneider 的结果推广到更一般的情形，我们介绍 A. Schwenk 和 U. Simon 的积分公式(参看[Schw-S])。

设 $a\in A^{n+1}$ 是固定的向量。令 $f=\langle U,a\rangle$，我们有

$$f_i=\langle U_i,a\rangle, \tag{21}$$

$$f_{ij}=-\sum A_{ijl}f_l-B_{ij}f, \tag{22}$$

$$\Delta f=-nL_1 f. \tag{23}$$

对 M 上的任意光滑函数 f，我们有下面的 Bochner—Lichnerowicz 公式：

$$\frac{1}{2}\Delta(\sum f_i^2)=\sum f_{ij}^2+\sum f_i(\Delta f)_i+\sum R_{ij}f_if_j. \tag{24}$$

由仿射微分几何的基本公式，我们有

$$R_{ij}=\sum A_{iml}A_{mlj}+\frac{1}{2}(n-2)B_{ij}+\frac{n}{2}L_1\delta_{ij}, \tag{25}$$

$$\sum B_{ij,i} = \sum A_{ijm}B_{mi} + n(L_1)_{,j}. \tag{26}$$

把(23)、(25)代入(24)，由于

$$\sum B_{ij}f_if_j = \sum (B_{ij}f_if)_{,j} - \sum fB_{ij,j}f_i - \sum ff_{ij}B_{ij}$$
$$= \sum (B_{ij}f_if)_{,j} + \sum B^2_{ij}f^2 - n\sum f_i(L_1)_{,i}f,$$

当 L_1=常数时，我们得到

$$\frac{n}{2}\Delta(\sum f_i^2) - \frac{n(n-2)}{2}\sum (B_{ij}f_if)_{,j} + \frac{1}{4}n^2L_1\Delta(f^2)$$
$$= [n\sum f_{ij}^2 - (\Delta f)^2] + n\sum A_{mil}A_{mlj}f_if_j + \frac{1}{2}(n-2)Sf^2, \tag{27}$$

式中

$$S = \sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = n(\sum B^2_{ij} - n L^2_1). \tag{28}$$

在 M 上积分，利用格林公式，可得以下积分公式：

$$\int_{\partial M}[n\sum f_if_{ij}v_j - \frac{n(n-2)}{2}\sum ff_iB_{ij}v_j + \frac{1}{2}n^2L_1\sum ff_iv_i]dO$$
$$= \int_M\{[n\sum f^2_{ij} - (\Delta f)^2] + n\sum A_{mil}A_{mlj}f_if_j$$
$$+ \frac{1}{2}(n-2)Sf^2\}dV, \tag{29}$$

式中 v_j 表示 ∂M 的单位外法向量(关于 Blaschke 度量的正交性以及由 M 的定向所诱导的定向)的分量，dO 表示 ∂M 的体积元。

当我们用仿射支撑函数 $p=\langle U,-x\rangle$ 代替上面的 f 时，积分公式(29)仍然成立，其证明方法与上面的类似，我们略去。

A. Schwenk 和 U. Simon 利用积分公式(29)证明，若在 M 上 L_1=常数，在 ∂M 上 $J=0$，且 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，则 $x(M)$ 是二次曲面的一部份(参看[Schw-S])。我们注意到，当 $n\geq 3$ 时，在 ∂M 上 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 这个条件是多余的。我们有下面定理。

定理 1.12　设 $x: M\to A^{n+1}(n\geq 3)$ 是紧致带边的局部严格凸超

曲面。若在 M 上 $L_1=$常数，在 ∂M 上 $J=0$，则 $x(M)$是二次曲面的一部份。

为证明定理，需要以下引理：

引理 1.1 设 $x:M\to A^{n+1}$ 是紧致带边的局部严格凸的超曲面。若在 M 上 $L_1=$常数，在 ∂M 上各点的仿射法线相交于一点或互相平行，则 $x(M)$是一个仿射球。

证明 1)若边界上各点的仿射法矢互相平行，设它们平行于固定矢量 b，令 $f=\langle U,b\rangle$。设

$$b=\sum b_ie_i+b_{n+1}e_{n+1},$$

则

$$f_j=\langle U_j,b\rangle=-b_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

由于在 ∂M 上 $b//Y$，我们在 ∂M 上有 $f_j=0$。

2) 若边界上各点的仿射法线交于一点，我们把坐标原点取在它们的交点上。令 $p=\langle U,-x\rangle$，则 $p_i=\langle U_i,-x\rangle$。由于在边界上 $x//Y$，所以在 ∂M 上 $p_i=0$。

在上面两种情况下，(29)左边的边界积分都化为零。由于(29)右边各项都是非负的，我们有

$$Sf^2=0,$$

或

$$Sp^2=0.$$

由于 $x(M)$是局部严格凸的，f 或 p 的零点集是稀疏的，从而 S 几乎处处为零。再由连续性可知 $S=0$，从而 $x(M)$是仿射球。证毕。

引理 1.2 设 $x:M\to A^{n+1}(n\geqslant 3)$是紧致带边的局部严格凸超曲面，若在 ∂M 上 $J=0$，则在 ∂M 上各点的仿射法线相交于一点或互相平行。

证明 我们在 M 上选一局部幺模仿射标架场$\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使 e_1、$\cdots$、$e_n\in T_xM$，$G_{ij}=\delta_{ij}$，$e_{n+1}=Y$，并且当限制到 ∂M 时，e_1，$e_2,\cdots,e_{n-1}$ 与 ∂M 相切。我们约定指标范围：

$$1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n-1,\ 1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n.$$

因为在 ∂M 上 $J=0$，从而在 ∂M 上 $A_{ijk}=0$，$A_{ijk,l}=0$。因此，由第一章 § 9 中的公式(9)，我们有

$$\frac{1}{2}(\delta_{i\alpha}B_{j\beta}-\delta_{j\beta}B_{i\alpha}+\delta_{j\alpha}B_{i\beta}-\delta_{i\beta}B_{j\alpha})$$

$$=A_{ij\alpha,\beta}-A_{ij\beta,\alpha}=0.$$

由此推出

$$B_{\alpha\beta}=\frac{1}{n-1}(\sum B_{\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta}:=\lambda\delta_{\alpha\beta},$$

$$B_{n\alpha}=0.$$

由于在 ∂M 上

$$B_{\alpha\beta,\gamma}-B_{\alpha\gamma,\beta}=\sum A_{\alpha\beta i}B_{i\gamma}-\sum A_{\alpha\gamma i}B_{i\beta}=0,$$

可以得到

$$\lambda_{,\alpha}=0,\quad \alpha=1,2,\cdots,n-1.$$

即 $\lambda=$常数。因此沿着 ∂M 我们有 $dY=-\lambda dx$。证毕。

定理 1.12 的证明。 由引理 1.1 和引理 1.2 可知，$x(M)$是仿射球。再应用 Schneider 的结果(定理 1.11)可得 $x(M)$是二次曲面的一部份。证毕。

定理 1.13 设 $x:M\to A^{n+1}(n\geqslant 3)$是连通的、紧致带边的局部严格凸超曲面。若在 M 上 $L_1\neq 0$，$\frac{L_2}{L_1}=$常数$\neq 0$，在 ∂M 上 $J=0$，则 $x(M)$是二次曲面的一部份。

证明 由引理 1.2，在 ∂M 上各点的仿射法线交于一点或互相平行。由于 $L_2\neq 0$，可知 $\lambda\neq 0$，即在 M 上各点的仿射法线交于一点。把坐标原点取在该点。由积分公式(6)，得到

$$\int_M (1-pL_1)dV=(-1)^{n+1}n!\int_{\partial M}A_0,\tag{30}$$

$$\int_M (L_1-pL_2)dV=(-1)^{n+2}n!\int_{\partial M}A_1\tag{31}$$

由于在 ∂M 上 $x/\!/Y$，我们有 $A_0=A_1=0$ 在 ∂M 上成立。令 $\frac{L_2}{L_1}=c$，可得

$$\int_M (L_1-c)dV=-\int_M p(cL_1-L_2)dV=0 \tag{32}$$

由于 $L_1\neq 0$，它在 M 上不变号。利用不等式

$$L_1^2\geqslant L_2$$

和(32)得到 $L_1=c$，这只有当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时才成立。再利用定理 1.11 可得定理 1.13。证毕。

定理 1.12 和定理 1.13 取自[Li-4]。

§2　仿射 Weingarten 曲面

在本节中我们用指标方法研究 A^3 中的卵形面的一些唯一性问题。指标方法是研究二维封闭曲面的一个很有用的方法，它最早由 Cohn-Vossen 在研究三维欧氏空间中的卵形面在等距下的刚性问题时创立的。当初他假定曲面是解析的。后来由于广义解析函数理论以及平面上的一阶椭圆型偏微分方程组理论的发展，解析性的假定可以去掉，我们先介绍线素场和网的孤立奇点的指标，以及平面上希尔伯特典型方程组的零点的孤立性理论，然后应用这些理论研究曲面的仿射微分几何。关于指标方法，可参看[Ho]和[Hu，etal]。

2.1　曲面上的线素场和网

设 M 是二维光滑流形．

定义 2.1　M 上的一个一维分布(distribution)θ 是一个映射，它对 M 上的每一点 p，配上 T_pM 的一个一维线性子空间。

分布 θ 称为 C^k 类的，如果对每一点 $p\in M$，存在 p 的一个开邻域$O(p)$以及$O(p)$上的一个C^k向量场Z，使对每一点$q\in O(p)$，$Z(p)$张成 $\theta(q)$。

由微分方程论可知，M 上的一个一维分布 θ 在局部上确定唯一的一族积分曲线。

一个 C^0 分布也叫连续分布。在一个紧致无边的流形上不一定存在 C^0 分布，这与流形的拓扑有关。

设 $O\subset M$ 是一个开集，O 以自然的方式继承了一个微分流形结构，成为 M 的开子流形。

定义 2.2　设 $O\subset M$ 是一个开集，称 O 上的一个一维分布 θ 为 M 上的一个**线素场**。称 $M-O$ 中的点为线素场 θ 的**奇点**。若 θ 是 O 上的 C^k 分布，则称 θ 为 M 上的 C^k **线素场**。

设 p 是 θ 的一个奇点，如果存在 p 的一个邻域，使在其中除 p 以外再无 θ 的奇点，则称 p 为 θ 的**孤立奇点**。

在一个紧致曲面上，如果一个线素场只有孤立奇点，那么奇点的个数是有限的。

我们现在定义连续线素场的孤立奇点的指标。假定 M 是定向黎曼流形，设 θ 是 M 上的连续线素场，p 是 θ 的孤立奇点。我们在 p 附近选一局部坐标域 D，使 $p\in D, D-\{p\}\subset O$。作一简单闭曲线 $c:[0,1]\to D$，使 p 在 c 的内部。M 以自然的方式在 c 上诱导了一个定向。假定参数增加的方向与 c 的正向一致。由于 $D-\{p\}\subset O$，c 上一定无奇点，而 c 内部只有 p 是唯一奇点。O 上的分布 θ 在 c 上的限制产生一个线性子空间场 $\theta(c(t))$。在 $c(0)$ 点选定 $\theta(c(0))$的一个方向，于是由连续性，对每个 $t, 0\leqslant t\leqslant 1$，我们都确定了 $\theta(c(t))$ 的定向。记这个一维有向线性子空间为$\theta(\overrightarrow{c(t)})$。我们要研究当沿 c 的正向绕一周后，$\theta(\overrightarrow{c(t)})$的方向的总变化。在 D 上取一个无奇点的连续向量场，例如，设 u, v 是与曲面定向一致的坐标系，我们取

$\frac{\partial}{\partial u}$作为这个无奇点的向量场。$\frac{\partial}{\partial u}$在 D 上确定了一个无奇点的有向线性子空间场，记为 $\vec{W}$。我们用$\angle[\overrightarrow{\theta(c(t))},\overrightarrow{W(c(t))}]$表示$\overrightarrow{\theta(c(t))}$与$\overrightarrow{W(c(t))}$的有向角。这个夹角的大小按 M 上的黎曼度量计算，符号按从$\overrightarrow{\theta(c(t))}$转到$\overrightarrow{W(c(t))}$的方向与 M 的定向一致或相反而定。令 $\delta_c\angle[\overrightarrow{\theta(c(t))},\overrightarrow{W(c(t))}]$表示绕 c 一周后这个角的总变化。容易看出，角度的这个总变化与在 $c(0)$ 点 $\theta(c(0))$的定向选取无关。

定义 2.3　孤立奇点 p 的指标(index)，记为 j，定义为

$$j=\frac{1}{2\pi}\delta_c\angle[\overrightarrow{\theta(c(t))},\overrightarrow{W(c(t))}].$$

容易看出 $j=\frac{n}{2}$，其中 n 是一个整数。

定理 2.1　j 与 $\vec{W}$ 和 c 的选取无关。

证明 1)　设 $\vec{V}$ 是另一个无奇点的连续向量场生成的有向线性子空间场，则

$$\delta_c\angle[\vec{\theta},\vec{W}]=\delta_c\angle[\vec{\theta},\vec{V}]+\delta_c\angle[\vec{V},\vec{W}].$$

由于 $\vec{W}$、$\vec{V}$ 都无奇点，当 c 选得充分小时可使 $\delta_c\angle[\vec{V},\vec{W}]$任意小。但 $\delta_c\angle[\vec{V},\vec{W}]$是 π 的整数倍，故 $\delta_c\angle[\vec{V},\vec{W}]=0$。

2)　由于$\frac{1}{\pi}\delta_c$ 连续地依赖于 c，而 $2j$ 又是一个整数，因此 j 与 c 的选取无关。证毕。

定理 2.2　j 与 M 的黎曼度量无关。

证明　设(g_{ij})、(h_{ij})为 M 上的两个正定的黎曼度量，则对每个 t，　$0\leqslant t\leqslant 1$，

$$f_{ij}(t)=(1-t)g_{ij}+th_{ij}$$

也是 M 上的正定黎曼度量。因为 $2j$ 是 t 的连续函数，又是整数必然与 t 无关，从而与 M 上的黎曼度量无关。证毕。

定理 2.3　设 M 是紧致无边的、亏格(genus)为 g 的二维曲而是 M 上的具有至多有限个奇点的连续线素场，则各奇点指标的

为

$$\sum j = 2 - 2g.$$

这是一个重要定理，关于它的证明请参看[Ho]。

定义 2.4　设 $O \subset M$ 是一个开集。M 上的一个网 N 是定义在 O 上的一个映射，它对每一点 $p \in O$，配上 T_pM 上的两个一维线性子空间 $l_1(p)$ 和 $l_2(p)$，使 $l_1(p) \neq l_2(p)$，$\forall\ p \in O$。

N 被称为是 C^k 的，如果对任意 $p \in O$，存在 p 的一个开邻域 $D(p)$，以及 $D(p)$ 上的两个 C^k 向量场 Z_1、Z_2，使对任意 $q \in D(p)$，$Z_1(q)$ 张成 $l_1(q)$，$Z_2(q)$ 张成 $l_2(q)$。

$M-O$ 的点称为网 N 的**奇点**。一个网在局部上由两个线素场生成，但整体上不一定如此，如果 O 上存在两个分布 θ_1、θ_2，使对每一点 $p \in O$，　$\theta_1(p) = l_1(p)$，　$\theta_2(p) = l_2(p)$，则称网 N 为**可分的**。

定理 2.4　设 M 是亏格为零的二维紧致无边的黎曼流形，L 是 M 上的对称$(0,2)$型连续张量场、设 L 满足：

1)　对任意 $p \in M$，$\det(L_{ij}(p)) \leqslant 0$，其中 L_{ij} 是 L 关于局部坐标系 u、v 的分量；

2)　若 $\det(L_{ij}(p)) = 0$，则 $L_{ij}(p) = 0$.

则由

$$L_{11}(du)^2 + 2L_{12}dudv + L_{22}(dv)^2 = 0 \tag{1}$$

在 M 上确定一个可分的连续网，这个网的奇点为

$$Q = \{p \in M \,|\, L_{ij}(p) = 0\}. \tag{2}$$

证明　设 $p \in Q$，通过球极投影我们可在 $M-\{p\}$ 上建立一个局部坐标系 u,v. 在等式(1)的两端乘以 L_{11}，我们得到

$$(L_{11}du + L_{12}dv)^2 + (L_{11}L_{22} - L^2_{12})dv^2 = 0.$$

它可以分解为以下两个方程：

(Ⅰ)　$L_{11}du + (L_{12} + \sqrt{L^2_{12} - L_{11}L_{22}})dv = 0$

和

(Ⅱ) $L_{11}du+(L_{12}-\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})dv=0.$

它们确定两族曲线，除非其中一个恒等于零。如果对(1)的两端乘以 L_{22}，我们得到

(Ⅰ′) $(L_{12}-\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})du+L_{22}dv=0$

和

(Ⅱ′) $(L_{12}+\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})du+L_{22}dv=0.$

注意到下面两个方程：

$$L_{11}du+(L_{12}+\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})dv=0,$$
$$(L_{12}-\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})du+L_{22}dv=0 \tag{3}$$

的系数在 $M-Q\cup\{p\}$ 上不会都为零，否则将有 $L_{11}=L_{12}=L_{22}=0$。当上面的两个方程的系数都不全为零时，即两个方程都非退化时，它们是等价方程。因此它们在 $M-Q\cup\{p\}$ 上决定了一分布 θ_1，使对任意点 $q\in M-Q\cup\{p\}$，$\theta_1(q)$ 为过点 q 的积分曲线的切子空间。同理，方程

$$L_{11}du+(L_{12}-\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})dv=0,$$
$$(L_{12}+\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}})du+L_{22}dv=0 \tag{4}$$

在 $M-Q\cup\{p\}$ 上确定了另一分布 θ_2。显然对任意的 $q\in M-Q\cup\{p\}$，有 $\theta_1(q)\neq\theta_2(q)$。因为若有 $\theta_1(q)=\theta_2(q)$，则 $\sqrt{L^2_{12}-L_{11}L_{22}}=0$。由条件 2)将有 $L_{11}=L_{12}=L_{22}=0$. 由于方程(1)与坐标系的选择无关，所确定的 θ_1、θ_2 也与坐标系的选择无关。如果我们另选一个局部坐标域使包含上面的点 p，则我们可确定点 p 的两个不同的子空间。实际上我们得到了 $M-Q$ 上的两个分布 θ_1、θ_2，从而得到了 M 上一个可分的网。证毕。

设 N 是定理 2.4 中所确定的可分的网，p 是它的孤立奇点。我们可以计算 θ_1 关于 p 的指标 j_1，也可以计算 θ_2 关于 p 的指标 j_2。

定理 2.5

$$j_1=j_2=j=-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\delta_c[\arg(L_{11}-\sqrt{-1}L_{12})]. \qquad (5)$$

证明 由于 θ_1 和 θ_2 在每一点有不同的的线性子空间，它们之间的夹角总不是 π 的整数倍，故 $j_1=j_2$. 令 $j=j_1=j_2$。考虑

$$L_{11}(du)^2+2L_{12}dudv+[(1-t)L_{22}-tL_{11}](dv)^2=0, \qquad (6)$$

$$0\leqslant t\leqslant 1.$$

由于当 $(L_{11},L_{12},L_{22})\neq(0,0,0)$ 时，

$$(1-t)L_{11}L_{22}-(1-t)L^2_{12}-tL^2_{12}-tL^2_{11}$$
$$=(1-t)(L_{11}L_{22}-L^2_{12})-t(L^2_{11}+L^2_{12})<0,$$

由定理 2.4，对于每一个 t，(6)总确定一个网，它以 p 为孤立奇点。因此对每个 t，有一个指标 $j(t)$。由于 $j(t)$ 是连续地依赖于 t 的，并且 $2j(t)$ 是整数，我们有 $j(t)=j, 0\leqslant t\leqslant 1$. 令 $t=1$，我们得到以下方程：

$$L_{11}(du)^2+2L_{12}dudv-L_{11}(dv)^2=0, \qquad (7)$$

它确定两个分布，我们取其中的一个．象以前一样，作一简单闭曲线 c 包含 p。由于指标与黎曼度量的选取无关，我们把参数 u、v 平面区域与 M 上 p 点的邻域等同起来。沿 c 把分布定向，并设它与 $\frac{\partial}{\partial u}$ 的有向角为 τ，则

$$du:dv=\cos\tau:\sin\tau, \qquad (8)$$

因而

$$L_{11}\cos 2\tau+L_{12}\sin 2\tau=0, \qquad (9)$$

沿着 c，L_{11} 和 L_{12} 不能同时为零，否则，由条件 1)和 2)，我们有 $L_{11}=L_{22}=L_{12}=0$，即该点是奇点，与 c 的取法不容。设 $\alpha=\arg(L_{11}-\sqrt{-1}L_{12})$，则(9)可以写成

$$\cos(\alpha+2\tau)=0. \qquad (10)$$

从而

$$\tau = -\frac{\alpha}{2} + \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{2},$$

$$\delta_c(\tau) = -\frac{1}{2}\delta_c(\alpha). \tag{11}$$

因此

$$j = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\delta_c[\arg(L_{11} - \sqrt{-1}L_{12})].$$

证毕。

2.2　零点的孤立性

设 D 是 R^2 上的一个有界开区域。考虑 D 上的希尔伯特典型方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial g}{\partial v} = a(u,v)f + b(u,v)g, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial u} = c(u,v)f + d(u,v)g, \end{cases} \tag{12}$$

其中 a、b、c、d 是变量 u,v 的已知函数。方程组(12)可以写成复数形式

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = PF + Q\bar{F}, \tag{13}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad z = u + \sqrt{-1}v,$$

$$F = f + \sqrt{-1}g, \quad P = \frac{1}{4}(a + d + \sqrt{-1}(c - b)).$$

$$Q = \frac{1}{4}(a - d + \sqrt{-1}(c + b)).$$

方程组(12)已得到充分的研究。在方程组(12)的基础上建立了广义解析函数的理论，它和基于柯西-黎曼方程组而建立起来的通常

的解析函数理论有很多共同之处。通常在研究方程组(12)时，假定系数 a、b、c、d 在 $\bar{D}$ 上连续。由于本书所讨论的曲面都是充分光滑的，因此我们在叙述有关方程组(12)的结果时假定系数 a、b、c、d 都是充分光滑的。如果 f 和 g 满足方程组(12)，并且具有对 u,v 的一阶连续偏微商，则称 f、g 为(12)的**完全正则解**。我们列举两个关于平面上一阶椭圆型方程组的结果(定理 2.6 和 2.7)，关于它们的证明请参阅[Ve-1,2]、[We]等著作。

定理 2.6(T. Carleman)　设 F 是方程(13)的完全正则解，若 $F\neq 0$，则 F 的零点是孤立的。

设 F 是方程(13)在 D 内的完全正则解，把(13)写成以下形式

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=P_0F,\qquad P_0=P+Q\frac{\bar{F}}{F},\tag{14}$$

P_0 在 D 内有界，且除去 D 内一些离散点外，P_0 处处连续，因此 P_0 在 D 内可积．令

$$W(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}\frac{P_0(y)}{y-z}dV,\tag{15}$$

则 $W(z)$是一个连续函数。(13)的解可以表为

$$F(z)=\varphi(z)e^{W(z)},\tag{16}$$

其中 $\varphi(z)$是 D 内的全纯函数。

考虑平面上的一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases}a_1\dfrac{\partial f}{\partial u}+a_2\dfrac{\partial f}{\partial v}+b_1\dfrac{\partial g}{\partial u}+b_2\dfrac{\partial g}{\partial v}=cf+eg,\\[2mm] \tilde{a}_1\dfrac{\partial f}{\partial u}+\tilde{a}_2\dfrac{\partial f}{\partial v}+\tilde{b}_1\dfrac{\partial g}{\partial u}+\tilde{b}_2\dfrac{\partial g}{\partial v}=\tilde{c}f+\tilde{e}g\end{cases}\tag{17}$$

若系数满足条件

$$\rho=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ \tilde{a}_1&\tilde{a}_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1&b_2\\ \tilde{b}_1&\tilde{b}_2\end{vmatrix}-\frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix}a_1&b_2\\ \tilde{a}_1&\tilde{b}_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_2&b_1\\ \tilde{a}_2&\tilde{b}_1\end{vmatrix}\right\}^2>0,\tag{18}$$

则称(17)为**椭圆型的**。平面上的一阶椭圆型方程组，经过一个适当的自变量和未知函数的变换，可以化成希尔伯特典型方程组(13)。

由于本书用不到这一点，我们不介绍具体变换过程，有兴趣的读者可参阅[We]. 但是我们指出，方程组(17)在一些几何问题中是有用的。

我们再考虑多个未知函数的情形。以下形式的方程组称为**齐次 Pascali 方程组**：

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = PF + Q\bar{F}, \tag{19}$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

定理 2.7([We]中的定理 5.37) 设 F 是齐次 Pascali 方程组(19)的完全正则解，若 $F \neq 0$，则 F 的零点是孤立的。

2.3 仿射 Weingarten 曲面

本节研究仿射主曲率 λ_1、λ_2 满足一个函数关系的曲面，我们把这种曲面叫做**仿射 Weingarten 曲面**。我们将证明一些与欧氏空间中的 Weingarten 曲面定理相类似的结果。

设 $x: M \to A^3$ 是一个局部严格凸曲面。我们在 $x(M)$ 上选等温参数 u、v，使 Blaschke 度量的分量为

$$(G_{ij}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

关于局部坐标系 u、v，我们有

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial v} - \frac{\partial B_{12}}{\partial u} = L_1 \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{E} A_{112}(B_{22} - B_{11}) + \frac{2}{E} A_{111} B_{12}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial v} - \frac{\partial B_{22}}{\partial u} = - L_1 \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{1}{E} A_{122}(B_{22} - B_{11}) - \frac{2}{E} A_{222} B_{12}. \tag{21}$$

因为

$$EL_1=\frac{1}{2}(B_{11}+B_{22}),$$

则有

$$L_1\frac{\partial E}{\partial v}=-E\frac{\partial L_1}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B_{11}+B_{22}}{2}\right),\tag{22}$$

$$L_1\frac{\partial E}{\partial u}=-E\frac{\partial L_1}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_{11}+B_{22}}{2}\right).\tag{23}$$

把(22)、(23)分别代入(20)、(21)中，得到

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B_{11}-B_{22}}{2}\right)-\frac{\partial B_{12}}{\partial u}=-E\frac{\partial L_1}{\partial v}+\frac{1}{E}A_{112}(B_{22}-B_{11})+\frac{2}{E}A_{111}B_{12},\tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_{11}-B_{22}}{2}\right)+\frac{\partial B_{12}}{\partial v}=E\frac{\partial L_1}{\partial u}+\frac{1}{E}A_{122}(B_{22}-B_{11})-\frac{2}{E}A_{222}B_{12}.\tag{25}$$

定理 2.8　设 $x:M\to A^3$ 是一个卵形面．设 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一个光滑函数，满足

1）存在一个光滑函数 $\alpha:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 使

$$\frac{\partial F}{\partial y_2}(y_1,y_2)-\frac{\partial F}{\partial y_1}(y_1,y_2)=\alpha(y_1,y_2)(y_2-y_1);$$

2）方程组

$$\begin{cases}F(y)=0,\\F'(y)=0\end{cases}$$

无解，其中 $F(y):=F(y,y)$。

如果在 M 上处处成立 $F(\lambda_1,\lambda_2)=0$，则 $x(M)$ 是一个椭球。

证明　由于 $\lambda_1=L_1+\sqrt{L_1^2-L_2}$，　$\lambda_2=L_1-\sqrt{L_1^2-L_2}$，对于非脐点处，$\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}$、$\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}$、$\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}$、$\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}$是存在的。由 $F(\lambda_1,\lambda_2)=0$，可得

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial\lambda_2}\cdot\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}=0,$$

即

$$2\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\cdot\frac{\partial L_1}{\partial u}+\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}-\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\right)\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}=0.$$

由此可得

$$2\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\frac{\partial L_1}{\partial u}+a(\lambda_1,\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}=0. \tag{26}$$

另一方面，

$$\frac{\partial L_2}{\partial u}=\frac{\partial \lambda_1}{\partial u}\cdot\lambda_2+\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}\cdot\lambda_1=2\lambda_2\frac{\partial L_1}{\partial u}+(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}, \tag{27}$$

因此

$$(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial \lambda_2}{\partial u}=2\lambda_2\frac{\partial L_1}{\partial u}-\frac{\partial L_2}{\partial u}$$

$$=2\lambda_2\frac{\partial L_1}{\partial u}-\left[2\frac{B_{22}}{E}\cdot\frac{\partial L_1}{\partial u}+\frac{B_{11}-B_{22}}{E}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_{22}}{E}\right)-2\frac{B_{12}}{E}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_{12}}{E}\right)\right], \tag{28}$$

把(28)代入(26)，我们得到

$$\left(2\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}+2a\lambda_2-2a\frac{B_{22}}{E}\right)\frac{\partial L_1}{\partial u}=a\frac{B_{11}-B_{22}}{2}+bB_{12}, \tag{29}$$

其中 a、b 是 M 上的光滑函数。(29)可以写成

$$\left(2\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}+2a\lambda_2-2a\frac{B_{22}}{E}\right)\frac{\partial L_1}{\partial u}\equiv 0 \mod\left(\frac{B_{11}-B_{22}}{2},B_{12}\right), \tag{30}$$

同理可得

$$\left(2\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}+2a\lambda_2-2a\frac{B_{22}}{E}\right)\frac{\partial L_1}{\partial v}\equiv 0 \mod\left(\frac{B_{11}-B_{22}}{2},B_{12}\right). \tag{31}$$

(30)和(31)是在非脐点成立。下面我们说明它在脐点处也成立。设在点 x_0 有 $\lambda_1=\lambda_2$，若存在邻域 $D(x_0)$，使 $D(x_0)$ 全由脐点组成，则在 $D(x_0)$ 内 $L_1=$常数，因此(30)、(31)显然成立。若对任意邻域 $D(x_0)$，存在 $x\in D(x_0)$ 使 x 非脐点，我们可作一序列 $x_i\to x_0$，其中 x_i 都非脐点。在 x_i 处(23)、(24)成立。由连续性可知(30)、(31)在点 x_0 成立。

考虑曲率线网

$$-B_{12}(du)^2+(B_{11}-B_{22})dudv+B_{12}(dv)^2=0. \quad (32)$$

设 $p\in M$ 是一个脐点，令 $\lambda_1=\lambda_2:=\lambda_0$，则 $F(\lambda_0)=0$。由于 $F(\lambda)=0$ 与 $F'(\lambda)=0$ 无公共根，我们有 $F'(\lambda_0)\neq 0$。由此可得

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(\lambda_0,\lambda_0)\neq 0,$$

即在点 p 有

$$2\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}+2a\lambda_2-2a\frac{B_{22}}{E}\neq 0. \quad (33)$$

因此存在 p 的邻域 $D(p)$，使上式在 $D(p)$ 内成立。把(30)、(31)(33)代入(24)、(25)，并且令

$$g=\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22}), \qquad f=B_{12}$$

便得到希尔伯特典型方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial v}-\dfrac{\partial f}{\partial u}\equiv 0 & \mathrm{mod}(f,g), \\ \dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\equiv 0 & \mathrm{mod}(f,g).\end{cases} \quad (34)$$

令

$$z=u+\sqrt{-1}v, \qquad F=f+\sqrt{-1}g.$$

由 Carleman 定理(定理 2.6)，要么在 $D(p)$ 内 $F\equiv 0$，要么 F 的零点是孤立的。若在 $D(p)$ 内 $F\equiv 0$，我们可以证明 M 全由脐点组成(参看后面定理 2.9 的证明)。因此 M 要么全由脐点组成，要么脐点是孤立的。下面我们计算孤立奇点的指标．F 可表示为

$$F(z)=\varphi(z)e^{W(z)},$$

式中 $\varphi(z)$ 是解析函数。设 p 对应于参数 z_0，则 z_0 是 $\varphi(z)$ 的孤立零点。设它是 n 重零点，我们作一简单闭曲线 c 包含 z_0，使 c 内除 z_0 外再无别的零点。我们有

$$\delta_c(\arg F)=\delta_c(\arg\varphi)+\delta_c(\mathrm{Im}W(z)). \quad (35)$$

由于 $W(z)$ 连续，由幅角原理，我们有

$$\delta_c(\arg F) = 2\pi n. \tag{36}$$

因此，由定理 2.5，有

$$j = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\delta_c\left\{\arg\left[-B_{12}-\sqrt{-1}\frac{(B_{11}-B_{22})}{2}\right]\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\delta_c(\arg F) = -\frac{n}{2} < 0. \tag{37}$$

由于 M 是亏格为零的曲面，由 Poincare 定理，有

$$2 = \sum j < 0.$$

我们得到一个矛盾。因此 M 全由脐点组成，即 $x(M)$ 是一个仿射球。由第二章 §3 的定理 3.1，它必是椭球。证毕。

定理 2.9 设 $x: M\to A^3$ 是一个连通的局部严格凸曲面，$F: R^2\to R$ 是一个光滑函数，满足定理 2.8 中的条件 1) 和 2)。如果在 M 上 $F(\lambda_1,\lambda_2)=0$，并且存在一段弧 $\Gamma\subset M$，使在 Γ 上 $\lambda_1=\lambda_2$，则 $x(M)$ 是仿射球的一部份。

证明 设 $p_0\in\Gamma$，$p_1\in M-\Gamma$ 是任一点，我们作一曲线 $c:[0,1]\to M$，使 $c(0)=p_0$，$c(1)=p_1$，由于方程组 (12) 的解的零点是孤立的，而在 Γ 上 $f=0$，$g=0$，我们可知，存在 p_0 的邻域 $D(p_0)$ 使在 $D(p_0)$ 中 $\lambda_1=\lambda_2$. 这时存在 $t>0$ 使在 $c([0,t))$ 上 $\lambda_1=\lambda_2$. 令

$$\bar{t} = \sup\{t\mid 0<t\leqslant 1, \text{在 } c([0,t)) \text{ 上 } \lambda_1=\lambda_2\},$$

由连续性推得在点 $\bar{t}$，$\lambda_1=\lambda_2$。假设在 p_1 点 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\bar{t}<1$。与上面类似的推理可知，存在 $c(\bar{t})$ 的一邻域 $\bar{D}$，使在 $\bar{D}$ 内 $\lambda_1=\lambda_2$，这与 $\bar{t}$ 的定义矛盾。因此在点 p_1，$\lambda_1=\lambda_2$，由 p_1 的任意性，在 M 上 $\lambda_1=\lambda_2$。证毕。

作为定理 2.8 和 2.9 的推论。我们能够得到下面的定理。

定理 2.10 设 $x: M\to A^3$ 是一个卵形面，$f(y_1,y_2)$ 是满足条件

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(y,y) = \frac{\partial f}{\partial y_2}(y,y) \tag{38}$$

的多项式，记 $f(y):=f(y,y)$。设 $\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$ 是 $f'(y)=0$ 的全体实根。如果在 M 上

$$f(\lambda_1,\lambda_2)=常数=C,$$

其中 $C\in R-\{f(p_1),f(p_2),\cdots,f(p_s)\}$，则 $x(M)$ 是一个椭球。

定理 2.11　设 $x:M\to A^3$ 是连通的、局部严格凸的曲面。$f(y_1,y_2)$、$\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$ 与定理 2.10 中的一样。如果在 M 上

$$f(\lambda_1,\lambda_2)=常数=C,$$

其中 $C\in R-\{f(p_1),f(p_2),\cdots,f(p_s)\}$，并且存在一段弧 $\Gamma\subset M$，使在 Γ 上 $\lambda_1=\lambda_2$，则 $x(M)$ 是仿射球的一部份。

注：若 $f(y_1,y_2)$ 是对称多项式，则条件(38)显然满足。

定理 2.10 和定理 2.11 的证明　考虑 y_2 的多项式

$$F(y_2)=\frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1,y_2)-\frac{\partial f}{\partial y_1}(y_1,y_2).$$

条件(38)表明 $F(y_1)=0$。即 y_1 是多项式 $F(y_2)$ 的根．因此存在多项式 $a(y_1,y_2)$，使

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1,y_2)-\frac{\partial f}{\partial y_1}(y_1,y_2)=a(y_1,y_2)(y_2-y_1).$$

因为 $C\in R-\{f(p_1),f(p_2),\cdots,f(p_s)\}$，下面两个方程：

$$f(y)-C=0,$$

$$f'(y)=0$$

无公根．应用定理 2.8 和定理 2.9 可完成证明，证毕。

我们已经知道，对于一个卵形面来说，标量曲率 $R=$ 常数、Pick 不变量 $J=$ 常数和定理 2.8 中定义的函数 $F(\lambda_1,\lambda_2)=$ 常数都导出 $x(M)$ 为椭球，下面我们讨论更一般的条件 $J=F(\lambda_1,\lambda_2)$。

定理 2.12　设 $x:M\to A^3$ 是连通的、局部严格凸的曲面。$F:R^2\to R$ 是光滑函数，它满足定理 2.8 中的条件 1)、2)。如果在 M 上，$J=F(\lambda_1,\lambda_2)$，并且存在一段弧 $\Gamma\subset M$，使在 Γ 上，$\lambda_1=\lambda_2$，$J=0$，则 $x(M)$ 是二次曲面的一部份。

证明　由 $J=F(\lambda_1,\lambda_2)$，可得

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial\lambda_2}\cdot\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}=\frac{\partial J}{\partial u},$$

即

$$2\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}\frac{\partial L_1}{\partial u}+a\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}=\frac{\partial J}{\partial u}. \tag{39}$$

因为

$$J=\frac{2}{E^3}(A^2{}_{111}+A^2{}_{222}),$$

我们有

$$\frac{\partial J}{\partial u}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(A_{111},A_{222}). \tag{40}$$

由(39)、(40)和(28)，可得到

$$\left(2\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}+2a\lambda_2-2a\frac{B_{22}}{E}\right)\frac{\partial L_1}{\partial u}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left(\frac{B_{11}-B_{22}}{2},B_{12},A_{111},A_{222}\right). \tag{41}$$

类似地，有

$$\left(2\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}+2a\lambda_2-2a\frac{B_{22}}{E}\right)\frac{\partial L_1}{\partial v}\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left(\frac{B_{11}-B_{22}}{2},B_{12},A_{111},A_{222}\right). \tag{42}$$

(41)和(42)是在非脐点处成立。设 $p\in M$ 是一个脐点，若存在 p 的邻域 $D(p)$，使在 $D(p)$ 内 $\lambda_1=\lambda_2$，则在 $D(p)$ 内 $\lambda_1=\lambda_2=$常数，从而 $J=$常数。这时(41)、(42)是平凡的。若在 p 的任何邻域内都有非脐点存在，我们可以构造一个非脐点序列 $p_i\to p$，由连续性可知，(41)和(42)在 p 点成立。

令

$$g=\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22}),\quad f=B_{12},$$

$$e=A_{111},\quad h=A_{222}.$$

我们可得

$$\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(f,g,e,h),$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(f,g,e,h).$$

由第一章§9中的公式(9)，有

$$A_{111,1}-A_{222,2}=-\frac{1}{2}E(B_{22}-B_{11}),$$

$$A_{111,2}+A_{222,1}=B_{12}E.$$

这样可得以下方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial v}-\dfrac{\partial f}{\partial u}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(f,g,e,h),\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(f,g,e,h),\\[2mm] \dfrac{\partial e}{\partial u}-\dfrac{\partial h}{\partial v}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(f,g,e,h),\\[2mm] \dfrac{\partial e}{\partial v}+\dfrac{\partial h}{\partial u}\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(f,g,e,h).\end{cases} \tag{43}$$

令

$$W_1=f+\sqrt{-1}g, \qquad W_2=e+\sqrt{-1}h,$$

$$W=\begin{pmatrix}W_1\\ \\ W_2\end{pmatrix}.$$

方程组(43)可以写成 Pascali 典型方程组

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}=PW+Q\overline{W}, \tag{44}$$

其中 P、Q 是 2×2 复数矩阵。根据定理 2.7，它的非平凡解的零点是孤立的。与定理 2.9 的证明中同样的推理可完成证明。证毕。

定理 2.8—2.12 是很一般的，因为满足定理 2.8 中条件 1)和 2)的函数很多。下面我们举几个例子。以下设 $x:M\to A^3$ 是一个卵形面。

例 1　设 $f(y_1,y_2)=y_1^k+y_2^k$。则 $f(y)=2y^k$，$f'(y)=2ky^{k-1}$。当 $k>1$ 时，$y=0$ 是 $f'(y)=0$ 的唯一解。当 $k\leqslant 1$ 但 $k\neq 0$ 时 $f'(y)$ 无根。

因此，若在 M 上

$$\lambda^k_1+\lambda^k_2=\text{常数}>0,\quad k\neq 0,$$

则 $x(M)$ 是一个椭球。

例 2 令 $f(y_1,y_2)=y_1^{k+1}+y_2^{k+1}-C(y^k_1+y^k_2)$，$C$ 是非零常数．则 $f(y)=2y^{k+1}-2Cy^k$，$f'(y)=2(k+1)y^k-2Cky^{k-1}$．如果假定 $y_1^2+y_2^2>0$，则能在 $f'(y)=0$ 中排出 $y=0$ 这个根。这时若 $C\neq 0$，则下面两个方程：

$$f(y)=2y^{k+1}-2Cy^k=0,$$

$$f'(y)=2(k+1)y^k-2Cky^{k-1}=0.$$

无公共根。因此若在 M 上

$$\frac{\lambda_1^{k+1}+\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1^k+\lambda_2^k}=\text{常数}=C\neq 0,\quad \lambda_1^2+\lambda_2^2>0,$$

则 $x(M)$ 是一个椭球．

例 3 设 $f(y_1,y_2)=L^m{}_1L^n{}_2$，其中 $L_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$，$L_2=y_1y_2$．则 $f(y)=y^{2n+m}$，$f'(y)=(2n+m)y^{2n+m-1}$，因此若在 M 上

$$L^m{}_1L^n{}_2=\text{常数}\neq 0,\quad m+2n\neq 0,$$

则 $x(M)$ 是一个椭球。

本段中的结果取自[Li-1]．在[Li-1]中作者还用指标方法证明了椭球的另外一些特征。关于指标方法在仿射微分几何中的应用方面的文章还有[Mu-1]、[Si-3]等。

§3 常曲率空间

A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面按 Blaschke 度量成为一黎曼流形。一个自然的问题是，有哪些常曲率空间？Blaschke 提出了下面的猜测（[Blas-2，]，P_{211}）：

猜测：A^3 中标量曲率为常数的卵形面必为椭球。

M. Kozlowski 和 U. Simon 的文章[Koz-S]回答了这个问题。他们更一般地证明，A^{n+1} 中的一个紧致无边的标量曲率为常数的爱因斯坦超曲面必为椭球。根据他们的结果，A^{n+1} 中的紧致无边的常截面曲率超曲面必为椭球。至于非紧的情形，要复杂得多，我们将在仿射球的范围内作一些探讨。

3.1　紧致无边情形

M. Kozlowski 和 U. Simon 证明了下面的定理。

定理 3.1　设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面。若当 $n=2$ 时 $R=$常数或者当 $n \geqslant 3$ 时，M 按 Blaschke 度量是一个爱因斯坦空间，则 $x(M)$ 是一个椭球。

要证明这个定理，我们需要下面的引理。

引理 3.1(Lichnerowicz)　设 M 是一个紧致无边的黎曼流形。若存在常数 $K>0$，使对所有的切向量 ξ，李奇形式满足

$$\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \geqslant (n-1)K\|\xi\|^2, \tag{1}$$

则 M 的拉普拉斯算子 Δ 的第一特征值 λ 满足

$$\lambda \geqslant nK. \tag{2}$$

引理 3.1 的证明可在[Cha]中找到。限于篇幅，这里我们把它省略。

定理 3.1 的证明　在 M 上选取幺模仿射标架场 $\{x; e_1, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $e_1, \cdots, e_n \in T_x M$。设 ω^1、ω^2、$\cdots$、ω^{n+1} 是对偶标架场。M 的 Blaschke 度量可表示为

$$G = \sum H^{\frac{-1}{n+2}} h_{ij} \omega^i \omega^j.$$

其体积元为

$$dV = H^{\frac{1}{n+2}} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

设 $a \in A^{n+1}$ 是任一固定向量。令

$$f = \langle U, a \rangle,$$

其中 U 是 M 的仿射余法矢量场，$\langle,\rangle: A^{n+1*}\times A^{n+1}\to R$ 为典型配合。则

$$\Delta f = -nL_1 f.$$

下面我们证明 $\int_M f dV = 0$.

在 A^{n+1} 中取欧氏内积，使 A^{n+1*} 与 A^{n+1} 等同，$\langle,\rangle$ 与所取的欧氏内积等同。可以取 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 关于 M 上的欧氏度量是单位正交的，并且 e_{n+1} 是 M 的单位欧氏外法向量场。此时 H 是 M 的高斯曲率，$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 是 M 的欧氏体积元。由第一章 §7 中的讨论，U 可以等同于 $H^{-\frac{1}{n+2}}e_{n+1}$。于是有

$$\begin{aligned}\int_M f dV &= \int_M H^{-\frac{1}{n+2}}\langle e_{n+1}, a\rangle H^{\frac{1}{n+2}}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n\\ &= \int_M \langle e_{n+1}, a\rangle\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n\\ &= \int_{S^n}\frac{1}{H}\langle e_{n+1}, a\rangle dO.\end{aligned}$$

其中 S^n 为 $(A^{n+1},\langle,\rangle)$ 中的单位超球面，dO 为 S^n 的体积元。由周知的积分公式（例如[Po-2]，p26）可知，上面的积分为零。

由于 $\chi = \frac{R}{n(n-1)} = J + L_1$，我们有

$$\begin{aligned}n\int_M \chi f^2 dV &\geqslant \int_M nL_1 f^2 dV = -\int_M f\Delta f dV\\ &= \int_M \|\operatorname{grad} f\|^2 dV\\ &\geqslant \lambda\int_M f^2 dV,\end{aligned}$$

其中 λ 为 M 关于 Blaschke 度量的拉普拉斯算子的第一特征值。上面最后的不等式是由于 $\int_M f dV = 0$. 因此有

$$\lambda \leqslant n\chi.$$

我们知道，对于紧致无边的黎曼流形有 $\lambda>0$，因而 $\chi>0$。由定理的条件和引理 3.1 推出

$$\lambda \geqslant n\chi.$$

因此 $\lambda=n\chi$. 从而 $Jf^2=0$ 处处成立。由于 $f=0$ 的点是一个零测集，因此

$$J\equiv 0.$$

故 $x(M)$ 是一个椭球。证毕。

U. Simon 和 M. Kozlowski 进一步提出了以下猜测：

猜测：设 $x: M\to A^{n+1}$ 是一个卵形面。如果 $R=$常数，则 $x(M)$ 是一个椭球。

对于 $n\geqslant 3$ 这个猜测还未被解决。

对于 A^3 中的卵形面来说，我们已经知道，若 $L_1=$常数或 $R=$常数，则 $x(M)$ 是一个椭球。很自然地想到，若 $J=$常数，$x(M)$ 是否一定是一个椭球？下面的定理回答了这个问题。

定理3.2　设 $x: M\to A^3$ 是一个卵形面。若在 M 上 $J=$常数，则 $x(M)$ 是一个椭球。①

证明　在 M 上选幺模仿射标架场 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$，使 e_1、$e_2\in T_xM$，$G_{ij}=\delta_{ij}$，$e_3=Y$。我们有

$$A_{ijk,l}-A_{ijl,k}=\frac{1}{2}(-\delta_{jl}B_{ik}-\delta_{il}B_{jk}+\delta_{ik}B_{jl}+\delta_{jk}B_{il}). \qquad (3)$$

从(3)和第一章 §9 末的李奇恒等式，我们得到

$$\Delta J=6\chi J+\sum A^2_{ijk,l}-2\sum A_{ijk}B_{ij,k}. \qquad (4)$$

由于

① 本书作者李安民 1986 年在西柏林技术大学数学系访问时，证明了这个定理。但很快获悉捷克数学家 A. Švec 也独立地证明了这个定理，时间略早一个月。因此这个结果至今未在学术杂志上发表。

$$\sum A_{ijk}B_{ij,k} = \sum (A_{ijk}B_{ij})_k - \sum B_{ij}A_{ijk,k},$$

$$\sum A_{ijk,k} = L_1\delta_{ij} - B_{ij},$$

我们可以得到以下积分公式

$$\int_M \left\{6\chi J + \sum A^2_{ijk,l} - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\right\} dV = 0. \tag{5}$$

若 $J=0$，结论已证。下面假定 $J=$ 常数 >0。我们可以选择标架 e_1、e_2，使在固定点 $x\in M$ 有 $A_{111}=0$。事实上，若在点 x，$A_{111}\neq 0$，我们作标架变换

$$\begin{cases}\bar{e}_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,\\ \bar{e}_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2,\end{cases}$$

则

$$\bar{A}_{111} = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta)A_{111} + (\sin^3\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta)A_{222}.$$

选择 θ 使

$$\frac{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta}{\sin^3\theta - \cos^2\theta\sin\theta} = -\frac{A_{222}}{A_{111}},$$

则 $\bar{A}_{111}=0$。以下我们假定在 x 点 $A_{111}=0$。因为

$$J = 2(A^2_{111} + A^2_{222}) = \text{常数},$$

我们有

$$A_{111}A_{111,1} + A_{222}A_{222,1} = 0,$$

$$A_{111}A_{111,2} + A_{222}A_{222,2} = 0.$$

从而在点 x

$$A_{222,1} = 0, \qquad A_{222,2} = 0.$$

$$A_{111,1} = -A_{221,1} = -A_{121,2} - \frac{1}{2}(B_{11} - B_{22})$$

$$= -\frac{1}{2}(B_{11} - B_{22}),$$

$$A_{111,2} = A_{112,1} + B_{12} = -A_{222,1} + B_{12} = B_{12}.$$

因此

$$\sum A_{ijk,l}^2 = 4(A_{111,1}^2 + A_{111,2}^2 + A_{222,1}^2 + A_{222,2}^2)$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \tag{6}$$

把(6)代入(5)，我们得到

$$6J\int_M \chi dV = 0.$$

但由 Gauss-Bonnet 公式 $\int_M \chi dV = 4\pi$，我们得到一个矛盾。因此 $J=0$，从而 $x(M)$是一个椭球。证毕。

我们提出以下问题：

问题　设 $x: M \to A^{n+1}(n \geqslant 3)$是一个卵形面。若在 M 上 $J=$常数，$x(M)$是否一定是椭球？

3.2　某些例子

我们现在研究非紧情形。我们将在仿射球的范围内对关于 Blaschke 度量为常曲率的空间进行探讨。以下主要取材于[Li-P]、[Li-4]。

我们先举出若干完备非紧，其仿射平均曲率、Pick 不变量、Blaschke 度量的标量曲率均为常数的超曲面。为了书写简便，在以下的例子中我们用下标表示点的坐标，即 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$.

例 1　椭圆抛物面

$$M: \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in A^n.$$

我们已经知道，它是一个抛物型仿射球，并且

$$J=0, \quad L_1=0, \quad \chi=0.$$

在第一章§8中，我们计算了它的 Blaschke 度量，显然 $R_{ijkl}=0$。

例 2　双曲面 $H(C, n)$：

$$x_{n+1} = (C^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \ C > 0.$$

它是一个双曲型仿射球，并且

$$J=0, \quad L_1=-C^{-\frac{2n+2}{n+2}}=\chi.$$

在第一章§8中我们计算了它的 Blaschke 度量，显然它是截面曲率为负常数的黎曼流形。

例 3 超曲面 $Q(C,n)$

它由方程

$$x_1x_2\cdots x_{n+1}=C, \quad C>0$$

所定义，它是一个双曲型仿射球。在第二章§1中我们已经计算了它的仿射平均曲率

$$L_1=-(n+1)^{-\frac{n-1}{n+2}}C^{-\frac{2}{n+2}}$$

下面我们计算它的黎曼曲率张量和 *Pick* 不变量。我们考虑它的一个连通分支：

$$x_{n+1}=\frac{C}{x_1x_2\cdots x_n}, \quad x_1>0, x_2>0, \cdots, x_n>0.$$

引入新的参数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$：

$$\begin{cases} x_1=e^{u_1}, \\ x_2=e^{u_2}, \\ \cdots\cdots \\ x_n=e^{u_n}, \end{cases}$$

曲面 $Q(C,n)$ 可以用参数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 表示成

$$\begin{cases} x_1=e^{u_1}, \\ x_2=e^{u_2}, \\ \cdots\cdots \\ x_n=e^{u_n}, \\ x_{n+1}=Ce^{-u_1-u_2-\cdots-u_n}. \end{cases}$$

取

$$e_1=(e^{u_1}, 0, \cdots, 0, -Ce^{-u_1-u_2-\cdots-u_n}),$$

$$e_2=(0, e^{u_2}, 0, \cdots, 0, -Ce^{-u_1-u_2-\cdots-u_n}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_n=(0,\cdots,0,e^{u_n},-Ce^{-u_1-u_2-\cdots-u_n}).$$

容易算出

$$(h_{ij})=\begin{pmatrix}2C & C & \cdots & C\\ C & 2C & \cdots & C\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C & C & \cdots & 2C\end{pmatrix},$$

因此(G_{ij})是一个常数矩阵，从而

$$R_{ijkl}=0,$$

即 $Q(C,n)$是一个平坦的黎曼流形。我们得到

$$\chi=0,\quad J=-L_1=(n+1)^{-\frac{n-1}{n+2}}C^{-\frac{2}{n+2}}.$$

下面利用 Calabi 的合成公式(第二章 § 1. 3)给出进一步的例子。设 $x':M'\to A^{p+1}$、$x'':M''\to A^{q+1}$ 是两个双曲型仿射球，它们的仿射平均曲率和标量曲率分别为 L'_1、L''_1、χ'、χ''。利用第二章 § 1 中的公式(29)，我们构造出一个新的双曲型仿射球 $x:M\to A^{p+q+2}$，利用该节的公式(41)和(44)，不难算出它的标量曲率和 Pick 不变量分别为

$$\chi=\frac{1}{(p+q+1)(p+q)C}\left[\frac{p(p-1)\chi'}{(p+1)(-L'_1)}+\frac{q(q-1)\chi''}{(q+1)(-L''_1)}\right],$$

$$J=\chi-L_1=\chi+\frac{1}{(p+q+2)C}.$$

例 4　取 $x'(M')=H(1,p)$，　$x''(M'')=H(1,q)$，我们得到双曲型仿射球

$$\left[x^2_{p+1}-(x^2_1+\cdots+x^2_p)\right]^{\frac{p+1}{2}}\cdot\left[x^2_{p+q+2}-(x^2_{p+2}+\cdots+x^2_{p+q+1})\right]^{\frac{q+1}{2}}=1.$$

它的仿射平均曲率、Pick 不变量和标量曲率分别为

$$L_1=\frac{-1}{(p+q+2)C},$$

$$J=\frac{1}{(p+q+2)C}-\frac{1}{(p+q+1)(p+q)C}\left[\frac{p(p-1)}{p+1}+\frac{q(q-1)}{q+1}\right],$$

$$\chi=-\frac{1}{(p+q+1)(p+q)C}\left[\frac{p(p-1)}{p+1}+\frac{q(q-1)}{q+1}\right],$$

其中

$$C=\left[(p+q+2)(p+1)^{p+1}(q+1)^{q+1}\right]^{-\frac{1}{p+q+3}}$$

例 5 取 $x'(M')=H(1,p)$， $x''(M'')=Q(1,q)$，我们得到双曲型仿射球

$$\left[x^2_{p+1}-(x^2_1+\cdots+x^2_p)\right]^{\frac{p-1}{2}}x_{p+2}\cdots x_{p+q+2}=1.$$

它的仿射平均曲率、Pick 不变量和标量曲率分别为

$$L_1=-\frac{1}{(p+q+2)C},$$

$$J=\frac{1}{(p+q+2)C}-\frac{p(p-1)}{(p+q+1)(p+q)(p+1)C},$$

$$\chi=-\frac{p(p-1)}{(p+q+1)(p+q)(p+1)C},$$

其中

$$C=\left[(p+q+2)(p+1)^{p+1}\right]^{\frac{-1}{p+q+3}}.$$

3.3 唯一性定理

我们先导出二维仿射球的一个微分公式，然后利用这个公式对标量曲率为常数的仿射球进行完全分类。

设 $x: M\to A^3$ 是一个仿射球。我们在 M 上选局部标架场 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$，使 e_1、$e_2\in T_xM$，$G_{ij}=\delta_{ij}$，$e_3=Y$。因为 $x(M)$是仿射球，我们有

$$A_{ijk,l}=A_{ijl,k}. \tag{7}$$

利用李奇恒等式和(7)式，可以得到

$$\Delta J=6\chi J+\sum A^2_{ijk,l}. \tag{8}$$

当 $J\neq0$ 时，我们进一步计算 $\sum A^2_{ijk,l}$。我们选择 e_1、e_2，使在固定点 $x\in M$，$A_{111}=0$。由于

$$J=2(A^2_{111}+A^2_{222}),$$

我们有

$$4(A_{111}A_{111,1}+A_{222}A_{222,1})=J_{,1},$$

$$4(A_{111}A_{111,2}+A_{222}A_{222,2})=J_{,2}.$$

因此，在点 x，有

$$A_{222,1}=\frac{J_{,1}}{4A_{222}},\quad A_{222,2}=\frac{J_{,2}}{4A_{222}},$$

$$A_{111,1}=-A_{221,1}=-A_{112,2}=A_{222,2},$$

$$A_{111,2}=-A_{221,2}=-A_{222,1}=A_{112,1}.$$

我们得到

$$\sum A^2_{ijk,l}=8(A^2_{222,1}+A^2_{222,2})=\frac{\|\nabla J\|^2}{J}. \tag{9}$$

把(9)代入(8)，我们得到

$$\Delta J=6\chi J+\frac{\|\nabla J\|^2}{J}. \tag{10}$$

即

$$\Delta\log J^{\frac{1}{6}}=\chi. \tag{11}$$

定理 3.3　设 $x:M\to A^3$ 是一个仿射球。若在 M 上 $\chi=$常数，则要么 $x(M)$是二次曲面的一部份，要么是曲面 $x_1x_2x_3=C(C>0)$的一部份(相差 A^3 中一幺模仿射变换不计)。

证明　由于 $\chi=$常数，所以 $J=$常数。分两种情形讨论：

1)　$J=0$. 由第一章§8 的定理 8.1，$x(M)$是二次曲面的一部份。

2)　$J\neq0$。由公式(11)可知 $\chi=0$，从而 $x(M)$关于 Blaschke 度量是一欧氏空间。由(8)式有

$$A_{ijk,l}=0.$$

我们选择坐标 u、v 使 Blaschke 度量为

$$G=(du)^2+(dv)^2.$$

这时

$$A_{ijk}=\text{常数}.$$

作正交变换

$$\begin{cases}\bar{u}=\cos\theta u+\sin\theta v,\\ \bar{v}=-\sin\theta u+\cos\theta v.\end{cases}$$

适当选择 θ 可使 $A_{111}=0$, $A_{222}=\sqrt{\frac{J}{2}}$。选择常数 C，使 $Q(C,2)$ 与 $x(M)$ 有相同的 Pick 不变量。象上面一样，可在 $Q(C,2)$ 上选局部坐标系 $\bar{u}$、$\bar{v}$，使它的 Blaschke 度量为 $\tilde{G}=(d\tilde{u})^2+(d\tilde{v})^2$，并且 $\tilde{A}_{111}=0$，$\tilde{A}_{222}=\sqrt{\frac{J}{2}}$。因为 $x(M)$ 和 $Q(C,2)$ 都是局部欧氏空间，故存在等距 $f:x(M)\to Q(C,2)$. 又由于 $A_{ijk}=\tilde{A}_{ijk}$，由仿射微分几何基本定理可知，$x(M)$ 与 $Q(C,n)$ 相差 A^3 中的一个幺模仿射变换。证毕。

定理 3.3 表明，按 Blaschke 度量是常曲率空间的二维仿射球只有四个：椭球($\chi>0$)，双曲面($\chi<0$)，椭圆抛物面($\chi=0$)和曲面 $Q(C,2)(\chi=0)$。

定理 3.4 设 $x:M\to A^3$ 是一个仿射完备的双曲型仿射球。如果存在常数 $\varepsilon>0$，使在 M 上有 $J\geq\varepsilon$，则 $x(M)$ 与 $Q(C,2)$ 相差一幺模仿射变换。

证明 不失一般性，我们可以假定 M 是单连通的(否则，我们可在它的单连通的通用覆盖面上讨论)。在 M 上选等温参数 u、v. 设 Blaschke 度量为 $G=E((du)^2+(dv)^2)$。M 上的拉普拉斯算子和高斯曲率可分别表示为

$$\Delta=E^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right),\tag{12}$$

$$\chi=\Delta\log E^{-\frac{1}{2}}.\tag{13}$$

我们引入一个新度量

$$\tilde{G}=J^{\frac{1}{3}}G=J^{\frac{1}{3}}E((du)^2+(dv)^2).$$

由 $J\geq\varepsilon$ 以及(M,G)的完备性可知$(M,\tilde{G})$的完备性。从(11)、(13)

可得

$$\widetilde{\chi}=J^{-\frac{1}{3}}E^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log(J^{-\frac{1}{6}}E^{-\frac{1}{2}})$$

$$=J^{-\frac{1}{3}}(-\Delta\log J^{\frac{1}{6}}+\chi)=0,$$

其中 $\widetilde{\chi}$ 是$(M,\widetilde{G})$的高斯曲率。因此$(M,\widetilde{G})$是欧氏空间，从而$(M,\widetilde{G})$共形等价于复平面 C. 由第二章§3 的定理 3.5 的推论，我们有 $\chi\leqslant 0$,从而

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log J^{\frac{1}{6}}\leqslant 0.$$

由于 $\log J^{\frac{1}{6}}\geqslant\log\varepsilon^{\frac{1}{6}}$,必须有 $J=$常数>0。根据定理 3.3,$x(M)$与 $Q(C,2)$相差 A^3 中一幺模仿射变换。证毕。

定理 3.5 设 $x(M)$是由 R^2 上的严格凸的函数 $x_3=f(x_1,x_2)$定义的一个图，假定它是仿射完备的和 $R=0$. 如果存在 $\varepsilon>0$,使 $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\geqslant\varepsilon$,则 $x(M)$是一个椭圆抛物面。

证明 设 a 是 A^3 中任一个向量，U 是 $x(M)$的仿射余法向量场。则

$$\Delta\langle U,a\rangle=-2L_1\langle U,a\rangle.$$

现在我们取 $a=(0,0,1)$,则有

$$\langle U,a\rangle=\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}.$$

因此有

$$\Delta\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}=-2L_1\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}.$$

因为 $x(M)$是仿射完备的和 $R=0$,所以 M 关于 Blaschke 度量是一个二维欧氏空间。又因为$-L_1=J\geqslant 0$,所以

$$\Delta\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}\geqslant 0,$$

即$\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}$是 M 上的次调和函数。由于$\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}} \leqslant \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$，因此

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 常数.$$

由第二章§1中的定理1.2知，$x(M)$是抛物型仿射球。再由第二章§3中的定理3.6，从$x(M)$的仿射完备性可推出它是椭圆抛物面。证毕。

下面我们进一步研究高维的情形。

定理 3.6 设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个双曲型仿射球。如果在 M 上 $R=0$，则相差 A^{n+1} 中的一个幺模仿射变换不计，$x(M)$位于 $Q(C,n)$ 上。

证明 在 M 上选取局部幺模仿射标架场$\{x; e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$，使 $e_1, \cdots, e_n \in T_x M$，$G_{ij} = \delta_{ij}$，$e_{n+1} = Y$. 因为 $x(M)$是仿射球，我们有

$$A_{ijk,l} = A_{ijl,k}, \tag{14}$$

$$R_{ijkl} = \sum (A_{ilm} A_{jmk} - A_{ikm} A_{jml}) - L_1(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}). \tag{15}$$

利用李奇恒等式和(14)、(15)可得

$$\frac{n(n-1)}{2}\Delta J = \sum A^2_{ijk,l} + \sum R^2_{ij} + \sum R^2_{ijkl} - (n+1)RL_1. \tag{16}$$

因为 $R=0$，$L_1=$常数<0，所以 $J=$常数。从(16)式可得

$$R_{ijkl} = 0,$$

$$A_{ijk,l} = 0.$$

这说明 $x(M)$是一个局部欧氏空间。选择局部坐标系 $u^1, u^2, \cdots, u^n$，使 Blaschke 度量为

$$G = (du^1)^2 + (du^2)^2 + \cdots + (du^n)^2,$$

则关于这个局部坐标系，$A_{ijk}=$常数。不失一般性，可以假定 $L_1 = -1$（否则，作一相似变换 $\tilde{x} = cx$，使 $\tilde{L}_1 = -1$，其中 C 是一适当选

择的常数）。取以下局部幺模仿射标架场

$$e_i=\frac{\partial x}{\partial u^i},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$e_{n+1}=Y=x.$$

于是有

$$\begin{cases} de_i = \sum \omega^j_i e_j + du^i x, \\ dx = \sum du^i e_i. \end{cases} \tag{17}$$

因为 G 的 Levi-Civita 连络 $\tilde{\omega}^j_i=0$，我们有

$$\omega^j_i = \sum A_{ijk} du^k. \tag{18}$$

由于定理 3.6 是局部的，限制在一个坐标邻域内考虑。设 $p\in M$ 是一个固定点，具有坐标 $(0,\cdots,0)$，$x\in M$ 是任意一点，具有坐标 $(v^1,\cdots,v^n)$。我们作一条连接 p 和 x 的曲线

$$u^i(t)=v^i t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

沿着这条曲线，方程组(17)成为

$$\begin{cases} \dfrac{de_i}{dt} = \sum A_{ijk} v^k e_j + v^i x, \\ \dfrac{dx}{dt} = \sum v^i e_i. \end{cases} \tag{19}$$

令

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ x \end{pmatrix},\quad B_k = \begin{pmatrix} A_{11k} & \cdots & A_{1ik} & \cdots & A_{1nk} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k1k} & \cdots & A_{kik} & \cdots & A_{knk} & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1k} & \cdots & A_{nik} & \cdots & A_{nnk} & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

方程组(19)可以写成矩阵形式

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k v^k B_k E. \tag{21}$$

因为 $R_{ijkl}=0$，$L_l=-1$，可积性条件(15)成为

$$\sum A_{iml}A_{jmk}-\sum A_{imk}A_{jml}+\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{jl}\delta_{ik}=0,$$

这意味着

$$B_iB_j=B_jB_i,\quad \forall\ i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$$

因此 B_1、B_2、$\cdots$、B_n 可以同时对角化，即存在矩阵 $C=(c_{AB})$，使得

$$B_k=C\begin{bmatrix}\lambda_1(k) & & & 0\\ & \lambda_2(k) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{n+1}(k)\end{bmatrix}C^{-1},\qquad(22)$$

其中 $\lambda_1(k)$、$\lambda_2(k)$、$\cdots$、$\lambda_{n+1}(k)$ 是常数。可选择 C 满足 $\det(c_{AB})=1$。由反极关系 $\sum A_{iik}=0$ 可得

$$\lambda_1(k)+\lambda_2(k)+\cdots+\lambda_{n+1}(k)=0,\qquad(23)$$
$$k=1,2,\cdots,n.$$

令

$$F=C^{-1}E,\qquad F=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_{n+1}\end{bmatrix}.\qquad(24)$$

由(21)、(22)、(24)可得

$$\frac{df_A}{dt}=\sum_k v^k\lambda_A(k)f_A,\quad A=1,2,\cdots,n+1.$$

因此

$$f_A(t)=f_A(0)\exp\Big(\sum_k v^k\lambda_A(k)t\Big).\qquad(25)$$

可以选择 $f_1(0)$，$f_2(0)$，$\cdots$，$f_{n+1}(0)$ 作为 A^{n-1} 的幺模仿射标架，即

$f_1(0)=(1,0,\cdots,0)$，$f_2(0)=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$f_{n+1}(0)=(0,\cdots,0,1)$. (20)、(24)、(25)一起给出

$$x_A(t)=c_{n+1,A}\exp\Big(\sum_k v^k\lambda_A(k)t\Big),$$

$$A=1,2,\cdots,n+1.$$

令 $t=1$,由(23)我们得到

$$x_1x_2\cdots x_{n+1}=c_{n+1,1}c_{n+1,2}\cdots c_{n+1,n+1}=\text{常数}。$$证毕。

注记 1　如果 $x(M)$ 是椭圆型或抛物型仿射球,且 $R=$ 常数,由不等式

$$\Delta J\geqslant 2(n+1)J(J-L_1)+\frac{2}{n(n-1)}\sum A_{ijk,l}^2\geqslant 0$$

可知 $J=0$,从而 $x(M)$ 在二次曲面上。

注记 2　由第二章§3中的定理 3.5 的推论,对任意完备的双曲型仿射球有 $J\leqslant -L_1$。

定理 3.6 表明,如果在 M 上 $J=-L_1$,则 $x(M)=Q(C,n)$

定理 3.3 说 A^3 中的常曲率仿射球只有四种,即椭球、双曲面、椭圆抛物面和 $Q(C,2)$。下面我们利用定理 3.6 证明:A^4 中的常曲率仿射球也只有四种。

定理 3.7　设 $x:M\to A^4$ 为具常截面曲率的仿射球。则 $x(M)$ 或者是二次曲面,或者相差 A^4 中一个幺模仿射变换不计,是 $Q(C,3)$ 的一部份。

我们先证明以下引理。

引理 3.2　设 $x:M\to A^4$ 为具常截面曲率的仿射球,$x_0\in M$ 是任一点,则可选取关于 Blaschke 度量的局部单位正交标架场,使

$$A_{iik}(x_0)=0,\qquad \forall\, i,k\in\{1,2,3\}.$$

证明　在 M 上选局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_4\}$,使 e_1、e_2、$e_3\in T_xM$,$G_{ij}=\delta_{ij}$,$e_4=Y$。如果 $A_{111}(x_0)\neq 0$,作正交变换

$$\begin{cases}\bar e_1=\cos\theta\, e_1+\sin\theta\, e_2,\\ \bar e_2=-\sin\theta\, e_1+\cos\theta\, e_2,\\ \bar e_3=e_3\end{cases}\tag{26}$$

象在定理 3.2 的证明中一样,总可选择适当的 θ_0,使

$$\bar A_{111}(x_0)=0.$$

若 $\bar A_{333}(x_0)\neq 0$,作正交变换

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \bar{e}_1, \\ \dot{e}_2 = \cos\tau\bar{e}_2 + \sin\tau\bar{e}_3, \\ \dot{e}_3 = -\sin\tau\bar{e}_2 + \cos\tau\bar{e}_3. \end{cases}$$

类似地，可求得 τ_0，使

$$A^*_{333}(x_0) = 0. \tag{27}$$

显然

$$A^*_{111}(x_0) = \bar{A}_{111}(x_0) = 0. \tag{28}$$

由于 M 是常截面曲率空间，故存在常数 a，使

$$R^*_{ijkl} = a(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{29}$$

另一方面，由于 $x(M)$ 是仿射球，则有

$$R^*_{ijkl} = \sum(A^*_{iml}A^*_{jmk} - A^*_{imk}A^*_{jml}) - L_1(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}). \tag{30}$$

由(29)和(30)可得

$$\begin{aligned} R^*_{1313}(x_0) &= A^{*2}_{113}(x_0) + A^{*2}_{123}(x_0) + A^{*2}_{133}(x_0) \\ &\quad - A^*_{112}(x_0)A^*_{233}(x_0) + L_1 = a, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} R^*_{1212}(x_0) &= A^{*2}_{112}(x_0) + A^{*2}_{122}(x_0) + A^{*2}_{123}(x_0) \\ &\quad - A^*_{112}(x_0)A^*_{222}(x_0) + A^{*2}_{113}(x_0) + L_1 = a. \end{aligned} \tag{32}$$

(31)－(32)，得

$$-A^*_{112}(x_0)A^*_{233}(x_0) - A^{*2}_{112}(x_0) + A^*_{112}(x_0)A^*_{222}(x_0) = 0.$$

由反极关系得

$$A^*_{112}(x_0)A^*_{222}(x_0) = 0.$$

若 $A^*_{222}(x_0) \neq 0$，则

$$A^*_{112}(x_0) = 0. \tag{33}$$

由(29)知

$$\chi = a, \qquad J = a - L_1. \tag{34}$$

由于在点 x_0，

$$J = \frac{1}{6}\{A^{*2}_{222}(x_0) + 3A^{*2}_{113}(x_0) + 3A^{*2}_{122}(x_0) + 3A^{*2}_{133}(x_0)$$

$$+3A^{*2}_{223}(x_0)+3A^{*2}_{233}(x_0)+6A^{*2}_{123}(x_0)\}. \tag{35}$$

与(31)比较，并利用反极关系得到

$$A^*_{122}(x_0)=0.$$

矛盾，所以 $A^*_{222}(x_0)=0$。从而

$$A^*_{iii}(x_0)=0,\qquad i=1,2,3. \tag{36}$$

由(29)和(30)得

$$\begin{aligned}
R^*_{1321}(x_0) &= A^*_{112}(x_0)A^*_{223}(x_0)+A^*_{113}(x_0)A^*_{233}(x_0)\\
&\quad -A^*_{112}(x_0)A^*_{113}(x_0)=0,\\
R^*_{1232}(x_0) &= A^*_{122}(x_0)A^*_{223}(x_0)\\
&\quad -A^*_{113}(x_0)A^*_{122}(x_0)-A^*_{133}(x_0)A^*_{223}(x_0)=0,\\
R^*_{1323}(x_0) &= A^*_{133}(x_0)A^*_{233}(x_0)-A^*_{112}(x_0)A^*_{133}(x_0)\\
&\quad -A^*_{122}(x_0)A^*_{233}(x_0)=0,
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
A^*_{112}(x_0)A^*_{113}(x_0)&=0,\\
A^*_{122}(x_0)A^*_{113}(x_0)&=0,\\
A^*_{122}(x_0)A^*_{112}(x_0)&=0。
\end{aligned}$$

以上三式表明 $A^*_{112}(x_0)$、$A^*_{113}(x_0)$、$A^*_{122}(x_0)$中至多一个非零。若它们全为零，引理的结论显然成立。若

$$A^*_{112}(x_0)\neq 0,\quad A^*_{113}(x_0)=A^*_{122}(x_0)=0,$$

作正交变换

$$\begin{cases}
\mathring{e}_1=\cos\sigma e_1^*+\sin\sigma\mathring{e}_3\\
\mathring{e}_2=e_2^*\\
\mathring{e}_3=-\sin\sigma\mathring{e}_1+\cos\sigma\mathring{e}_3
\end{cases} \tag{37}$$

则有

$$\mathring{A}_{iii}(x_0)=\mathring{A}_{113}(x_0)=\mathring{A}_{122}(x_0)=0,$$

$$\mathring{A}_{112}(x_0)=A^*_{112}(x_0)\cos 2\sigma+A^*_{123}(x_0)\sin 2\sigma.$$

在(37)取

$$\sigma_0=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{A^*_{123}(x_0)}{A^*_{112}(x_0)}\right),$$

则有

$$\bar{A}_{112}(x_0)=0.$$

从而引理结论成立。对 $A^*_{112}(x_0)=A^*_{122}(x_0)=0$, $A^*_{113}(x_0)\neq 0$ 或 $A^*_{112}(x_0)=A^*_{113}(x_0)=0$, $A^*_{122}(x_0)\neq 0$ 可类似地讨论。证毕。

定理 3.7 的证明 由引理 3.2,对于固定点 $x_0\in M$,可在 M 上选择局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_4\}$ 使 e_1、e_2、$e_3\in T_xM$, $G_{ij}=\delta_{ij}$, $e_4=Y$,并且 $A_{iik}(x_0)=0$, $i,k=1,\cdots,4$。因为 M 具常截面曲率 a,所以 $\chi=a$, $J=\chi-L_1=$常数。若 $J=0$,则 $x(M)$是二次曲面。若 $J\neq 0$,则在点 x_0,有

$$0=J_{,l}=\frac{1}{3}\sum A_{ijk}(x_0)A_{ijk,l}(x_0)=2A_{123}(x_0)A_{123,l}(x_0).$$

由于 $J\neq 0$,所以 $A_{123}(x_0)\neq 0$,从而

$$A_{123,l}(x_0)=0,\quad l=1,2,3.$$

下面我们证明 $A_{ijk,l}(x_0)=0$, $\forall\ i,j,k,l\in\{1,2,3\}$。由于 $R_{ijkl,m}\equiv 0$,我们有

$$\begin{aligned}
R_{1321,l}=&\sum(A_{1m1}A_{3m2}-A_{1m2}A_{3m1})_{,l}\big|_{x_0}\\
&=A_{111,l}(x_0)A_{123}(x_0)-A_{122,l}(x_0)A_{123}(x_0)\\
&\quad-A_{123}(x_0)A_{133,l}(x_0)\\
&=2A_{111,l}(x_0)A_{123}(x_0)=0.
\end{aligned}$$

同理

$$R_{1232,l}=-2A_{222,l}(x_0)A_{123}(x_0)=0,$$

$$R_{1323,l}=-2A_{333,l}(x_0)A_{123}(x_0)=0.$$

因而

$$A_{iii,l}(x_0)=0,\quad i,l=1,2,3.$$

由于 $x(M)$是仿射球,$A_{ijk,l}$ 关于四个下标对称,要证明它们在点 x_0

全为零，剩下仅需证明

$$A_{ij,j}(x_0)=0,\qquad i,j=1,2,3. \tag{38}$$

由 $\sum_i A_{iil,l}=0$　得到

$$A_{221,1}(x_0)+A_{331,1}(x_0)=0,$$
$$A_{112,2}(x_0)+A_{332,2}(x_0)=0,$$
$$A_{113,3}(x_0)+A_{223,3}(x_0)=0.$$

由此立即推出(38)式。

由于

$$\Delta J=\frac{1}{3}\sum(A_{ijk,l}^2+A_{ijk}A_{ijr}R_{rk}+2A_{ijk}A_{irl}R_{jrkl}).$$

在点 x_0 有

$$\Delta J=\frac{1}{3}(12aA_{123}^2(x_0)+12aA_{123}^2(x_0))=0.$$

由于 $A_{123}(x_0)\neq0$. 所以

$$a=0,$$

即 $R=0$。由定理 3.6， $x(M)$位于 $Q(C,3)$上。证毕。

定理 3.7 取自[Yu].

由于定理 3.3 和定理 3、7，我们提出下面的问题。

问题　设 $x:M\to A^{n+1}(n\geqslant4)$是具常截面曲率的仿射球。$x(M)$一定是二次曲面或 $Q(C,n)$的一部份吗？

第四章 仿射极大曲面

A^{n+1} 中的局部严格凸的超曲面上可以定义仿射不变的黎曼度量—Blaschke 度量，因此有一个仿射不变的体积元。本节研究体积的极值问题，对应的欧拉—拉格朗日方程是四阶非线性偏微分方程。由于它的简单的仿射微分几何意义，它有很多好的性质。历史上，人们与黎曼几何中的极小曲面类比，称这个仿射不变体积的极值曲面为仿射极小曲面。Calabi 曾经计算过极值曲面的体积的第二变分（参看[Ca-4]），他证明，在很多重要情形，第二变分是负的。因此，他建议称仿射不变的体积的极值曲面为仿射极大曲面（affine maximal surface）。仿射极大曲面的研究还很不成熟，很多重要的问题，如 Plateau 问题和仿射 Bernstein 问题都还未被解决。这是一个值得研究的、很有意义的领域。本章第一节计算各阶仿射平均曲率积分的第一变分。第二节研究仿射极大曲面。我们将导出一个仿射 Weierstrass 公式，并围绕着仿射 Bernstein 问题展开研究。至于体积的第二变分我们不讨论，感兴趣的读者请参看我们上面提到的 Calabi 的文章。

§1 仿射平均曲率的变分公式

设 $x:M\to A^{n+1}$ 是一个紧致的局部严格凸的超曲面（有边或无边），L_r 是 $x(M)$ 的第 r 阶仿射平均曲率。本节计算 $\int_M L_r dV$ 的第一变分。当 $r=0$ 时，我们得到体积的第一变分公式。

我们先把本节中使用的记号交待一下。

在 M 上选取一个局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$，使 e_1、$\cdots$、$e_n\in T_xM$，e_{n+1} 沿着 $x(M)$ 在点 x 的仿射法线方向。则有

$$\left.\begin{aligned} dx &= \sum \omega^A e_A, \\ de_A &= \sum \omega_A^B e_B. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

A^{n+1} 的结构方程为

$$\left.\begin{aligned} d\omega^A &= \sum \omega^B \wedge \omega_B^A, \\ d\omega_A^B &= \sum \omega_A^C \wedge \omega_C^B, \\ \sum \omega_A^A &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

我们把微分形式 ω^A、ω_A^B 在 $x(M)$ 上的限制记为 $\widetilde{\omega}^A$、$\widetilde{\omega}_A^B$。得到

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{\omega}^{n+1} = 0, \\ &\widetilde{\omega}_i^{n+1} = \sum h_{ij}\widetilde{\omega}^j, \qquad h_{ij} = h_{ji}, \\ &\widetilde{\omega}_{n+1}^i = -\sum l^{ik}\widetilde{\omega}_k^{n+1}, \qquad l^{ik} = l^{ki}, \\ &\widetilde{\omega}_{n+1}^{n+1} = -\frac{1}{n+2}d_M \log H. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中 $H=\det(h_{ij})$，d_M 表示 M 上的外微分。我们定义一个微分形式如下：

$$\widetilde{\Omega}_r = \frac{1}{n!}\sum\delta^{12\cdots n}_{i_1i_2\cdots i_n}\widetilde{\omega}^{i_1}_{n+1}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\omega}^{i_r}_{n+1}\wedge\widetilde{\omega}^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\omega}^{i_n}. \qquad (4)$$

直接计算表明

$$H^{\frac{r+1}{n+2}}\widetilde{\Omega}_r = (-1)^r H^{\frac{1}{n+2}}L_r\widetilde{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\widetilde{\omega}^n = (-1)^r L_r dV, \qquad (5)$$

式中

$$dV = H^{\frac{1}{n+2}}\widetilde{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\widetilde{\omega}^n \qquad (6)$$

是 Blaschke 度量的体积元。

我们现在考虑 $x(M)$ 的单参数变分。令 I 表示区间 $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$。令 $f:M\times I\to A^{n+1}$ 是一个光滑映射，它在 $M\times\{t\}$，$t\in I$，的限制是一个局部严格凸的浸入，并且对任意的 $p\in M$，$f(p,0)=x(p)$。在 $M\times I$ 上选取一个局部幺模仿射标架场 $\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使对每个 $t\in I$，$e_i(p,t)$ 切于 $f(M\times\{t\})$，$e_{n+1}(p,t)$ 沿着 $f(M\times\{t\})$ 在点 $f(p,t)$ 处的仿射法线方向，并且

$$h_{ij}(p,0) = \delta_{ij}, \qquad p\in M. \qquad (7)$$

这时

$$e_{n+1}(p,0) = Y, \qquad \widetilde{\omega}^{n+1}_{n+1}(p,0) = 0. \qquad (8)$$

我们引入微分形式 Ω_r：

$$\Omega_r = \frac{1}{n!}\sum\delta^{12\cdots n}_{i_1i_2\cdots i_n}\omega^{i_1}_{n+1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}_{n+1}\wedge\omega^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_n}.$$

外微分 Ω_r，并利用结构方程(2)，可得

$$d\Omega_r = (r+1)\omega^{n+1}_{n+1}\wedge\Omega_r + (n-r)\omega^{n+1}\wedge\Omega_{r+1}. \qquad (9)$$

因此

$$d\left(H^{\frac{r+1}{n+2}}\Omega_r\right) = \frac{r+1}{n+2}H^{\frac{r+1}{n+2}}d\log H\wedge\Omega_r$$

$$+ H^{\frac{r+1}{n+2}}[(r+1)\omega^{n+1}_{n+1}\wedge\Omega_r + (n-r)\omega^{n+1}\wedge\Omega_{r+1}]. \qquad (10)$$

通过 f 把微分形式拉回到 $M\times I$ 上，并把含 dt 的项分开。它们可以写成

$$\left.\begin{aligned} \omega^i &= \widetilde{\omega}^i + a^i dt, \\ \omega^{n+1} &= a dt, \\ \omega^i_{n+1} &= \widetilde{\omega}^i_{n+1} + a^i_{n+1} dt, \\ \omega^{n+1}_{n+1} &= \widetilde{\omega}^{n+1}_{n+1} + a^{n+1}_{n+1} dt, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 $\widetilde{\omega}^i$、$\widetilde{\omega}^i_{n+1}$、$\widetilde{\omega}^{n+1}_{n+1}$ 是依赖于 p 和 t 的，但不含 dt 的微分式；a^i、a、a^i_{n+1}、a^{n+1}_{n+1} 是 p、t 的函数。$a^i(p,0)$、$a(p,0)$ 恰是变分向量场的切分量和法分量。因为 $h_{ij}(p,0)=\delta_{ij}$，我们有

$$H(p,0) = 1, \qquad \omega^{n+1}_{n+1}(p,0) = a^{n+1}_{n+1} dt. \tag{12}$$

$M\times I$ 上的微分算子 d 可以分解成

$$d = d_M + dt\frac{\partial}{\partial t}. \tag{13}$$

把 $H^{\frac{r-1}{n+2}}\Omega_r$ 分解为

$$H^{\frac{r-1}{n+2}}\Omega_r = H^{\frac{r-1}{n+2}}\widetilde{\Omega}_r + dt \wedge \varphi, \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{r}{n!}\sum \delta^{12\cdots n}_{i_1 i_2\cdots i_n} a^{i_1}_{n+1}\widetilde{\omega}^{i_2}_{n+1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\omega}^{i_r}_{n+1} \wedge \widetilde{\omega}^{i_{r+1}} \\ & \wedge \cdots \wedge \widetilde{\omega}^{i_n} + (-1)^r \frac{n-r}{n!}\sum \delta^{12\cdots n}_{i_1 i_2\cdots i_n}\widetilde{\omega}^{i_1}_{n+1} \\ & \wedge \cdots \wedge \widetilde{\omega}^{i_r}_{n+1} \wedge a^{i_{r+1}}\widetilde{\omega}^{i_{r+2}} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\omega}^{i_n}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} d\left(H^{\frac{r-1}{n+2}}\Omega_r\right) = {} & d_M\left(H^{\frac{r-1}{n+2}}\widetilde{\Omega}_r\right) \\ & + dt \wedge \frac{\partial\left(H^{\frac{r-1}{n+2}}\widetilde{\Omega}_r\right)}{\partial t} - dt \wedge d_M\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

比较(10)和(15)，并令含 dt 的项相等，便有

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\left(H^{\frac{r-1}{n+2}}\widetilde{\Omega}_r\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = {} & d_M\varphi + \frac{r+1}{n+2}\left.\frac{\partial \log H}{\partial t}\right|_{t=0}\widetilde{\Omega}_r \\ & + (r+1)a^{n+1}_{n+1}(p,0)\widetilde{\Omega}_r + (n-r)\phi\widetilde{\Omega}_{r+1}, \end{aligned} \tag{16}$$

式中 $\Phi=a(p,0)$ 是变分向量场的法分量。在 M 上积分，如果 M 无

边，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M L_r dV\Big|_{t=0} = (r+1)\int_M\left(a_{n+1}^{n+1} + \frac{1}{n+2}\frac{\partial \log H}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} L_r dV$$

$$- (n-r)\int_M L_{r+1}\Phi dV. \tag{17}$$

下面计算$\left(a_{n+1}^{n+1}+\frac{1}{n+2}\frac{\partial\log H}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}$。由于我们只考虑第一变分，不失一般性，可以假定变分由下式给出：

$$f(p,t) = x(p) + t\Phi e_{n+1} + t\sum \Psi^i e_i,$$

其中 $e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}$ 是 $x(M)$上的局部幺模仿射标架场，它使

$$h_{ij} = \delta_{ij}, \qquad e_{n+1} = Y, \tag{18}$$

Φ,Ψ^i 是变分向量场的法分量和切分量。对 $f(p、t)$微分得

$$\begin{aligned} d_M f(p,t) &= d_M x + t d_M\Phi e_{n+1} - t\Phi\sum l^{ij}\tilde{\omega}_i^{n+1}e_j \\ &\quad + t\sum d_M\Psi^i e_i + t\sum \Psi^i\tilde{\omega}_i^j e_j + t\sum\Psi^i\tilde{\omega}_i^{n+1}e_{n+1} \\ &= \sum_i (e_i + t\Phi_i e_{n+1} - t\Phi\sum l^{ij}e_j + t\sum\Psi_i^j e_j \\ &\quad + t\Psi^i e_{n+1} + t\sum\Psi^l A_{lij} e_j)\tilde{\omega}^i \end{aligned}$$

其中 Φ_i、Ψ_i^j 由下式确定

$$d_M\Phi = \sum \Phi_i\tilde{\omega}^i$$

$$d_M\Psi^j + \frac{1}{2}\sum\Psi^i(\tilde{\omega}_i^j - \tilde{\omega}_j^i) = \sum \Psi_i^j\tilde{\omega}^i.$$

在 M 上选如下的标架场：

$$\begin{aligned} e_i(\cdot,t) &= e_i + t\Phi_i e_{n+1} - t\Phi\sum l^{ij}e_j \\ &\quad + t\sum\Psi_i^j e_j + t\Psi^i e_{n+1} + t\sum\Psi^l A_{lij}e_j, \end{aligned} \tag{19}$$

$e_{n+1}(\cdot,t)$沿着 $f(M\times\{t\})$的仿射法线方向，则

$$\tilde{\omega}^i(p,t) = \tilde{\omega}^i(p,0) = \tilde{\omega}^i.$$

因为

$$de_i(\cdot,t)=d_M e(\cdot,t)+dt\frac{\partial e_i(\cdot,t)}{\partial t}$$

$$=\sum(\widetilde{\omega}_i^j+a_i^j dt)e_j(\cdot,t)+(\widetilde{\omega}_i^{n+1}+a_i^{n+1}dt)e_{n+1}(\cdot,t),$$

从(19)可得

$$a_i^j=-\Phi l^{ij}+\Psi_i^j+\sum\Psi^l A_{lij},$$

因此

$$a_{n+1}^{n+1}=-\sum_{i=1}^{n}a_i^i=n\Phi L_1-\sum_{i=1}^{n}\Psi_i^i. \tag{20}$$

由于

$$d_M e_i(\cdot,t)\equiv d_M e_i+td_M\Phi_i e_{n+1}-t\Phi\sum l^{il}\widetilde{\omega}_l^{n+1}e_{n+1}$$

$$+t\sum\Psi_i^l\widetilde{\omega}_l^{n+1}e_{n+1}+t\sum\Psi^l A_{lij}\widetilde{\omega}_j^{n+1}e_{n+1}$$

$$+td_M\Psi^i e_{n+1}\qquad \mathrm{mod}(e_1,e_2,\cdots,e_n),$$

$$[e_1(\cdot,t),\cdots,e_n(\cdot,t),d_M e_i(\cdot,t)]=\sum h_{ij}(\cdot,t)\widetilde{\omega}^j,$$

我们有

$$\sum\frac{\partial h_{ij}(\cdot,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}\widetilde{\omega}^j=\sum\left[e_1,\cdots,\frac{\partial e_l(\cdot,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0},\cdots,e_n,d_M e_i\right]$$

$$+\left[e_1,\cdots,e_n,\frac{\partial d_M e_i(\cdot,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}\right]$$

$$=\left(-n\Phi L_1+\sum\Psi_l^l\right)\sum\delta_{ij}\widetilde{\omega}^j+\sum\Phi_{ij}\widetilde{\omega}^j$$

$$-\sum\Phi_l A_{lij}\widetilde{\omega}^j+\sum\Psi_j^i\widetilde{\omega}^j-\Phi\sum l^{ij}\widetilde{\omega}^j+\sum\Psi_i^j\widetilde{\omega}^j,$$

即

$$\frac{\partial h_{ij}(\cdot,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-nL_1\Phi\delta_{ij}+(\sum\Psi_l^l)\delta_{ij}+\Phi_{ij}$$
$$+\Psi_j^i+\Psi_i^j-\Phi l^{ij}-\sum\Phi_l A_{lij}. \tag{21}$$

从(18)和(21)得到

$$\frac{1}{n+2}\frac{\partial\log H}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-\frac{n(n+1)}{n+2}L_1\Phi+\sum\Psi_l^l+\frac{1}{n+2}\Delta\Phi,$$

因此

$$\left(a^{n+i}_{n+1}+\frac{1}{n+2}\frac{\partial\log H}{\partial t}\right)\bigg|_{t=0}=\frac{n}{n+2}L_1\Phi+\frac{1}{n+2}\Delta\Phi. \tag{22}$$

把(22)代入(17)便得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M L_r dV\bigg|_{t=0}=\int_M\left[\frac{r+1}{n+2}L_r\Delta\Phi+\frac{n(r+1)}{n+2}L_1L_r\Phi-(n-r)L_{r+1}\Phi\right]dV. \tag{23}$$

利用格林公式，便得到下面的变分公式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M L_r dV\bigg|_{t=0}$$
$$=\int_M\left[\frac{r+1}{n+2}\Delta L_r+\frac{n(r+1)}{n+2}L_1L_r-(n-r)L_{r+1}\right]\Phi dV. \tag{24}$$

当 $r=0$ 时，(24)给出仿射不变体积的第一变分公式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M dV\bigg|_{t=0}=-\frac{n(n+1)}{n+2}\int_M L_1\Phi dV. \tag{25}$$

当 M 是带边超曲面时，如果假定在边界 ∂M 上 $a^i=0, a^i_{n+1}=0$，则上面的变分公式仍然成立。

利用变分公式(23)，我们可以导出第三章§1中的闵可夫斯基积分公式。考虑特殊变分

$$f(p,t)=(1+t)x(p),$$

直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M L_r dV\bigg|_{t=0}=\left[(n-r)-\frac{n(r+1)}{n+2}\right]\int_M L_r dV. \tag{26}$$

由公式(23)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_M L_r dV\bigg|_{t=0}=-\int_M\left[\frac{r+1}{n+2}L_r\Delta P+\frac{n(r+1)}{n+2}L_1L_rP-(n-r)L_{r+1}P\right]dV \tag{27}$$

其中 P 是仿射支撑函数。比较(26)和(27)，并利用公式

$$\Delta P = -nL_1P + n,$$

我们得到

$$\int_M (L_r - PL_{r+1})\,dV = 0,$$

$$r = 0,1,\cdots,n-1.$$

作为变分公式(24)的一个应用,给出下面定理。

定理 1.1　设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个卵形面,并且 $L_n > 0$ 处处成立。如果 n 为偶数,且 $x(M)$ 是变分问题 $\delta\int_M L_{\frac{n}{2}}dV = 0$ 的解,则 $x(M)$ 是一个椭球。

证明　由公式(24)可知,若对任意的变分向量场有 $\delta\int_M L_{\frac{n}{2}}dV = 0$,则

$$\frac{1}{2}\Delta L_{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}\left(L_1L_{\frac{n}{2}} - L_{\frac{n}{2}+1}\right) = 0,$$

因此

$$\int_M \left(L_1L_{\frac{n}{2}} - L_{\frac{n}{2}+1}\right)dV = 0.$$

应用不等式

$$L_1L_{\frac{n}{2}} \geqslant L_{\frac{n}{2}+1}$$

可完成证明。证毕。

本节取材于[Li-2].

§2　仿射极大曲面

2·1　仿射极大曲面的定义及其某些基本结果

定义 2.1　设 $x: M \to A^{n+1}$ 是一个局部严格凸的超曲面。若在 M 上处处有 $L_1 = 0$,则称 $x(M)$ 为一个**仿射极大超曲面**。

由§1中的变分公式(25)可知，仿射极大超曲面是体积泛函取极值的曲面。

由第二章§3中的定理3.2容易得到下面的定理。

定理 2.1 在 A^{n+1} 中不存在紧致无边的仿射极大超曲面。

设 $x: M\to A^{n+1}$ 是由一个严格凸函数给出的图：

$$x_{n+1}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

下面我们导出使 $x(M)$ 是一个仿射极大超曲面的 f 所满足的微分方程。取

$$e_1=\left(1,0,\cdots,0,\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$e_2=\left(0,1,\cdots,0,\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_n=\left(0,\cdots,0,1,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

$$e_{n+1}=(0,0,\cdots,0,1),$$

则

$$(h_{ij})=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right),\qquad H=\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right).$$

因此 Blaschke 度量为

$$G_{ij}=H^{-\frac{1}{n+2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}.$$

把仿射余法矢等同于 $H^{-\frac{1}{n+2}}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$，即

$$U=H^{-\frac{1}{n+2}}\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1},-\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,-\frac{\partial f}{\partial x_n},1\right).$$

由 $\Delta U=-nL_1U$ 可知，$x(M)$ 是仿射极大曲面，当且仅当

$$\Delta\left(H^{-\frac{1}{n+2}}\right)=0,$$

即

$$\Delta\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]^{\frac{-1}{n+2}}\right\}=0, \tag{1}$$

式中

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{\det(G_{ij})}}\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(G^{ij}\sqrt{\det(G_{ij})}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{2}$$

这是一个四阶非线性偏微分方程。

显然任意一个抛物型仿射球都是仿射极大超曲面，即由方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)=\text{常数}$$

的凸解 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$给出的图都是仿射极大超曲面。特别地，椭圆抛物面

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

是一个仿射完备的仿射极大超曲面。

陈省身提出了以下的问题(参看[Cher-1])：

问题：设 $x_3=f(x_1,x_2)$是定义在整个 R^2 上的凸函数，若 $M=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_3=f(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in R^2\}$是一个仿射极大曲面，$M$ 是否为椭圆抛物面？

这个问题称为仿射 Bernstein 问题，至今还未解决。

Calabi 在附加上"仿射完备"的条件下证明了上面的猜测(参看[Ca-4])。

定理 2.2(Calabi)　设 $x:M\to A^3$ 是一个欧氏完备的仿射极大曲面。如果 $x(M)$还是仿射完备的，则 $x(M)$是一个椭圆抛物面。

证明　由于 $x(M)$是局部严格凸的、欧氏完备的曲面，根据 Hadamard 定理，它是一个凸函数的图。设它由凸函数 $x_3=f(x_1,x_2)$给出。则

$$\Delta\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}=0$$

由于 $R=2\chi=2(J+L_1)=2J\geqslant 0$，$\det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)>0$，根据丘成桐的一个定理(参看[Ya-S])，在李奇曲率非负的黎曼流形上，不存在非常数的正调和函数，因此

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)=\text{常数}$$

即 $x(M)$ 是一个完备的抛物型仿射球，所以 $x(M)$ 必是椭圆物面。证毕。

我们提出以下仿射 Bernstein 问题。

问题： 设 $x: M\to A^{n+1}$ 是由凸函数

$$x_{n+1}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

定义的一个图。如果 f 是定义在整个 R^n 上的，并且 $x(M)$ 是仿射极大曲面，$x(M)$ 是否是椭圆抛物面？

2.2 仿射 Weierstrass 表示

三维欧氏空间的极小曲面论中有一个著名的 Weierstrass 公式，这个公式对极小曲面的研究有重要意义。A^3 中的仿射极大曲面论中也有一个类似的公式，下面我们导出这个公式。

设 $x: M\to A^3$ 是一个局部严格凸的曲面。在 M 上选取关于 Blaschke 度量的等温参数 u、v，令 $e_1=\dfrac{\partial x}{\partial u}$，$e_2=\dfrac{\partial x}{\partial v}$。则

$$G_{11}=G_{22}>0,\qquad G_{12}=G_{21}=0.$$

在 A^3 中取一固定的幺模仿射标架，使 A^3 与 R^3 等同。在 R^3 中引入欧氏内积"·"，使 A^3 成为欧氏空间。有以下的公式：

$$U\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=-G_{11},\quad \frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=0,\tag{3}$$

$$U\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=-G_{22},\tag{4}$$

$$U\cdot Y=1,\quad \frac{\partial U}{\partial u}\cdot Y=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial v}\cdot Y=0.\tag{5}$$

由这些公式可以推出

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda U \times \frac{\partial U}{\partial v}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \mu U \times \frac{\partial U}{\partial u}, \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, Y\right] \cdot \left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right] = G_{11}^2, \tag{8}$$

式中"×"表示三维欧氏空间中的向量积。因为

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, Y\right] = |\det(h_{ij})|^{\frac{1}{4}} = G_{11}, \tag{9}$$

所以

$$\left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right] = G_{11} > 0. \tag{10}$$

由公式(3)和(6)得到

$$-G_{11} = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda\left[U, \frac{\partial U}{\partial v}, \frac{\partial U}{\partial u}\right] = -\lambda G_{11}.$$

因此

$$\lambda = 1.$$

类似地，可得 $\mu = -1$。于是

$$\frac{\partial x}{\partial u} = U \times \frac{\partial U}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -U \times \frac{\partial U}{\partial u}.$$

由此得到下面的公式：

$$x = \int U \times \frac{\partial U}{\partial v} du - U \times \frac{\partial U}{\partial u} dv. \tag{11}$$

如果 $x(M)$ 是仿射极大曲面，则

$$\Delta U = 0, \tag{12}$$

其中

$$\Delta = \frac{1}{\left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right]}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right). \tag{13}$$

因此 U 的各分量是调和函数。

反之，给定了三个调和函数

$$U^1(u,v),\ U^2(u,v),\ U^3(u,v),$$

它们满足

$$\left[U,\frac{\partial U}{\partial u},\frac{\partial U}{\partial v}\right]>0,\quad \forall\ (u,v)\in\Omega\subset R^2,$$

其中

$$U=(U^1(u,v),U^2(u,v),U^3(u,v)),$$

Ω 是 R^2 中的一单连通区域。我们可以构造一个曲面

$$x=\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)}U\times\frac{\partial U}{\partial v}du-U\times\frac{\partial U}{\partial u}dv,\tag{14}$$

其中 $(u_0,v_0)\in\Omega$ 是一固定点，(u,v) 是 Ω 中的任意点。由于

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(U\times\frac{\partial U}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(U\times\frac{\partial U}{\partial u}\right)=U\times\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right)=0,$$

上面的积分(14)与路径无关。我们证明(14)定义的曲面是一个局部严格凸的仿射极大曲面。由(14)我们有

$$\frac{\partial x}{\partial u}=U\times\frac{\partial U}{\partial v},\tag{15}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-U\times\frac{\partial U}{\partial u},\tag{16}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\times\frac{\partial x}{\partial v}=\left[U,\frac{\partial U}{\partial u},\frac{\partial U}{\partial v}\right]U.\tag{17}$$

令

$$e_3=\frac{U}{\left[U,\frac{\partial U}{\partial u},\frac{\partial U}{\partial v}\right](U\cdot U)},$$

则

$$\left[\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},e_3\right]=1,$$

即$\frac{\partial x}{\partial u}$、$\frac{\partial x}{\partial v}$、$e_3$是一个幺模仿射标架场。令

$$x_{ij} = \sum \Gamma_{ij}^k x_k + h_{ij} e_3, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 2$$

式中$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, x_2 = \frac{\partial x}{\partial v}$，$x_{ij}$表示$x$的二阶普通微商。容易算得

$$h_{11} = h_{22} = \left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right]^2, \qquad h_{21} = h_{12} = 0.$$

因此$x(M)$是局部严格凸的曲面，它的 Blaschke 度量为

$$G_{ij} = [\det(h_{ij})]^{-\frac{1}{4}} h_{ij},$$

即

$$G_{11} = G_{22} = \left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right], \qquad G_{12} = G_{21} = 0.$$

它的余法矢量为

$$[\det(h_{ij})]^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} = U.$$

因为$U^1(u,v)$、$U^2(u,v)$、$U^3(u,v)$是调和函数，所以$x(M)$是仿射极大曲面。

下面给出一些仿射极大曲面的例子。

例 1　取$U=(1,u,v)$，则有

$$x = \left(\frac{1}{2}(u^2+v^2), -u, -v\right),$$

这是椭圆抛物面。

例 2　取$U=(1,u^2-v^2,v)$。则有

$$\left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right] = 2u,$$

当$u>0$时，(14)给出

$$x = \left(\frac{1}{3}u^3 + uv^2, -u, -2uv\right), \qquad u > 0.$$

例 3　取$U=(u,v,2uv)$，则

$$\left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right] = -2uv,$$

当 $u>0, v<0$ 时，(14)给出

$$x = \left(-\frac{2}{3}v^3, -\frac{2}{3}u^3, \frac{1}{2}(u^2+v^2)\right), \quad u>0, v<0.$$

显然，$x(M)$ 为抛物型仿射球的充分必要条件是：$U(u,v)$ 在一个平面上，即存在常数 a、b、c、d 使

$$aU^1(u,v) + bU^2(u,v) + cU^3(u,v) + d = 0, \qquad \forall\ (u,v) \in \Omega.$$

特别，当取 $U^1(u,v)=1$，而 $U^2(u,v)$、$U^3(u,v)$ 为任意调和函数时，我们得到一个定义在区域 Ω 上的抛物型仿射球，其中 Ω 是由条件

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U^2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial U^3(u,v)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial U^2(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial U^3(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} > 0$$

所确定的区域。这样我们可得很多二维抛物型仿射球，即方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 常数$$

的解。

由下面的命题，可以由调和函数造出很多高维的抛物型仿射球。

命题 2.1　设 $f_1(x_1,\cdots,x_p)$、$f_2(x_{p+1},\cdots,x_{p+q})$ 分别是方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 1, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant p,$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) = 1, \qquad p+1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant p+q$$

的解，则 $f=f_1(x_1,\cdots,x_p)+f_2(x_{p+1},\cdots,x_{p+q})$ 是方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_A \partial x_B}\right) = 1, \qquad 1 \leqslant A,B \leqslant p+q$$

的解。

命题 2.1 的证明是直接的。

例如，例1中的曲面可表为

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2).$$

例2的曲面可表为

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2^3 - \frac{x_3^2}{4x_2}.$$

由这两个曲面可得另一个抛物型仿射球：

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{3}x_4^3 - \frac{x_5^2}{4x_4}.$$

从局部微分几何的观点来看，公式(14)给出了 A^3 中所有仿射极大曲面。下面的整体问题是有意义的(我们对一般的 n 叙述)。

问题　A^{n+1} 中除了椭圆抛物面外，是否还有别的仿射完备的仿射极大超曲面？

这是仿射微分几何中一重要的、尚未解决的问题，这个问题有时也称为仿射 Bernstein 问题。

作为 Weierstrass 表示的应用，我们导出关于调和函数的一个定理。

定理 2.3　设 $f(u,v)$、$g(u,v)$、$p(u,v)$ 是定义在整个 R^2 上的调和函数。如果存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得

$$F = \begin{vmatrix} f & g & p \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial p}{\partial v} \end{vmatrix} \geqslant \varepsilon, \qquad \forall\ (u,v) \in R^2 \tag{18}$$

则 $f(u,v)$、$g(u,v)$、$p(u,v)$ 都是线性函数。

证明　令 $U=(f(u,v),g(u,v),p(u,v))$。按公式(14)构造一个仿射极大曲面 M。则有

$$R = 2\chi = 2(J + L_1) = 2J \geqslant 0.$$

M 的 Blaschke 度量为 $G=F((du)^2+(dv)^2)$。由此推出

$$-\frac{1}{2}\Delta\log F = \chi \geqslant 0,$$

即 $\log F$ 是全平面上的上调和函数。由于 $F \geqslant \varepsilon > 0$，因此 $F=$常数。由此得到 $\chi = J = 0$，从而得知 M 是一个椭圆抛物面。经过一个仿射变换

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

后，M 的方程可写成

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2). \tag{20}$$

直接计算可知，M 的仿射余法矢为

$$(-\dot{x}_1, -\dot{x}_2, 1). \tag{21}$$

M 的 Blaschke 度量为

$$G = (d\dot{x}_1)^2 + (d\dot{x}_2)^2. \tag{22}$$

这意味着 $\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$ 是等温参数。因此函数

$$\varphi(\xi) = \dot{x}_1(u,v) + \sqrt{-1}\,\dot{x}_2(u,v) \tag{23}$$

是全纯或反全纯的，即

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v} = -\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u}, \tag{24}$$

或者

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} = -\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u}, \tag{25}$$

因为

$$\begin{pmatrix} -\dot{x}_1 \\ -\dot{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ p \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\begin{vmatrix} f & g & p \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial p}{\partial v} \end{vmatrix} = \text{常数}, \tag{27}$$

可得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \text{常数}, \tag{28}$$

即

$$\left(\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v}\right)^2 = \text{常数}, \tag{29}$$

由刘维尔定理可知 $\varphi'(\xi)=$常数，即 $\varphi(\xi)$是一个线性函数。因此 $f(u,v)$、$g(u,v)$、$p(u,v)$都是线性函数。证毕。

注记　条件(18)中的 $\varepsilon>0$ 是必要的。比如，取 $f=1$、$g=e^u\cos v$，$p=e^u\sin v$，则

$$\begin{vmatrix} f & g & p \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial p}{\partial v} \end{vmatrix} = e^{2u} > 0,$$

但 f、g、p 不是线性函数。

2.3　**高斯映射**　本段和下一段研究 A^3 中仿射完备的仿射极大曲面。我们将在一些附加的条件下回答上一段提出的问题。这一段的目的是研究仿射完备的仿射极大曲面的仿射法线的分布。我们在 $A^3-\{0\}$中引入一个如下的等价关系～：

$$(a^1,a^2,a^3) \sim (b^1,b^2,b^3) \Leftrightarrow \text{存在一个实数 } \lambda>0, \text{使} (b^1,b^2,b^3)=\lambda(a^1,a^2,a^3).$$

令 Q 表示商空间 $A^3-\{0\}/\sim$，令

$$[a] = \{y \in A^3 - \{0\} | y \sim a\} \tag{30}$$

表示 a 的等价类。映射

$$\pi: A^3 - \{0\} \to Q$$
$$a \to [a] \tag{31}$$

称为从 $A^3 - \{0\}$ 到 Q 的投影。

设 $x: M \to A^3$ 是一个局部严格凸的曲面，定义高斯映射如下：

$$g: M \to Q$$
$$x \to [Y_x], \tag{32}$$

Y_x 表示 $x(M)$ 在点 x 的仿射法矢。当在 A^3 中引入一个欧氏度量后，Q 可以与单位球面 S^2 等同，高斯映射(32)可以等同于以下映射

$$g': M \to S^2$$
$$x \to Y_x / \| Y_x \|, \tag{33}$$

其中 $\| Y_x \| = \sqrt{Y_x \cdot Y_x}$。以后我们将把 g 和 g' 等同。

下面我们给出高斯映射的另一解释。由 $\left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right] > 0$ 可知，$U: M \to R^3$ 是一具有中心仿射法化的浸入曲面。由(5)可得

$$Y = \lambda \frac{\partial U}{\partial u} \times \frac{\partial U}{\partial v},$$

$$1 = Y \cdot U = \lambda \left[U, \frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}\right],$$

因此 $\lambda > 0$，并且

$$\frac{Y}{\| Y \|} = \frac{\frac{\partial U}{\partial u} \times \frac{\partial U}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial U}{\partial u} \times \frac{\partial U}{\partial v} \right\|}$$

即(33)定义的高斯映射恰为余浸入曲面 $U: M \to R^3$ 的普通高斯映射。

用 $U(M)$ 的分布来刻画仿射极大曲面看来是有兴趣的。显然，$x(M)$ 是一个抛物型仿射球，当且仅当 $U(M)$ 在一个平面上。进一

步，有下面的定理。

定理 2.4　设 $x: M \to A^3$ 是一个局部严格凸的、仿射完备的仿射极大曲面。如果 $U(M)$ 落在半空间内，则 $x(M)$ 是一个椭圆抛物面。

证明　通过一个齐次坐标变换后，可以假定 $U^3(u,v) > c$，这里 c 是一个常数。根据刘维尔定理，$U^3(u,v) =$ 常数。因此 $x(M)$ 是一个抛物型仿射球。因为 $x(M)$ 是仿射完备的，它必是一个椭圆抛物面。证毕。

注记　如果 $x(M)$ 是凸函数 $x_3 = f(x_1, x_2)$ 的图，容易看出 $U^3 > 0$，并且由于 $U: M \to A^3$ 是中心仿射曲面，我们不能作坐标平移，因此定理 2·4 比定理 2·2 更一般。

下面我们研究仿射完备的仿射极大曲面的仿射法线的分布。用 S^n 表示 n 维单位球面，用 CP^n 表示 n 维复射空间。首先介绍一些术语。

定义 2.2　R^{n+1}（或 C^{n+1}）中一个向量集被称为处于一般位置的，如果集中任意 $n+1$ 个向量是线性无关的。S^n 中一个点集被称为处于一般位置的，如果它们作为 R^{n+1} 中的向量集是处于一般位置的。

定义 2.3　CP^n 中一个超平面集被称为处在一般位置的，如果集中任意 $n+1$ 个超平面没有公共点。

引理 2.1（**Borel 定理**）　设 $f: C \to CP^n$ 是一条全纯曲线，并且它不全落在 CP^n 的一个超平面上。则对任意 $n+2$ 个处于一般位置的超平面，$f(c)$ 至少同其中一个超平面相交。

引理 2.2　设 $v(k)$，$1 \leqslant k \leqslant 5$，是 C^2 中的 5 个向量。它们满足条件

$$\operatorname{rank}\{v(i), v(j), v(k)\} = 2,$$
$$\forall \ \{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4,5\},$$

则其中至少有三个向量是处在一般位置的。

证明　因为 $\operatorname{rank}\{v(1), v(2), v(3)\} = 2$，在这三个向量中至少

有两个是线性无关的，设为 $v(1)$ 和 $v(2)$。如果 $\{v(1),v(2),v(3)\}$ 不处在一般位置，则 $v(3)/\!/v(1)$，或者 $v(3)/\!/v(2)$。假定 $v(3)/\!/v(1)$。若 $\{v(1),v(2),v(4)\}$ 也不处在一般位置，必有 $v(4)/\!/v(1)$，或者 $v(4)/\!/v(2)$。由 $\operatorname{rank}\{v(1),v(3),v(4)\}=2$ 推出 $v(4)/\!/v(2)$。于是我们断言：$\{v(1),v(2),v(5)\}$ 是处在一般位置的。事实上，若 $v(5)/\!/v(1)$，则 $\operatorname{rank}\{v(1),v(3),v(5)\}=1$；如果 $v(5)/\!/v(2)$，则 $\operatorname{rank}\{v(2),v(4),v(5)\}=1$。这两种情形都与条件不符。证毕。

以下定理是欧氏空间极小曲面论中著名的 Xavier 定理的仿射类似。

定理 2.5 设 $x:M\to A^3$ 是一个局部严格凸的仿射完备的仿射极大曲面。如果 $g(M)$ 不取 5 个或更多的处于一般位置的点以及它们的对径点，则 $x(M)$ 必是一个椭圆抛物面，这时 $g(M)$ 只能取一个点。

证明 在 M 上取等温参数 u,v。定义映射

$$f:M\to CP^2$$

$$(u,v)\to(Z^1(u,v),Z^2(u,v),Z^3(u,v)),$$

其中 (Z^1,Z^2,Z^3) 是 CP^2 的齐次坐标，并且

$$Z^k(u,v)=\frac{\partial U^k}{\partial u}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial U^k}{\partial v},\qquad k=1,2,3.$$

由于选择不同的等温参数时，(Z^1,Z^2,Z^3) 仅相差一个非零的倍数，并且由于(10)，$(Z^1,Z^2,Z^3)\neq(0,0,0)$，因此上面的 f 是很好地定义了的。因为 $x(M)$ 是仿射极大曲面，U^1,U^2,U^3 是调和函数，因此 $Z^k(\xi)$，$\xi=u+\sqrt{-1}v$，是全纯函数。我们假定 M 是单连通的(否则我们讨论它的通用覆盖空间)。由于 $x(M)$ 是仿射完备的，并且 $R=2(J+L_1)=2J\geq 0$，它必共形等价于 C。假定 $g(M)$ 不取以下点：

$$\pm W(k)=\pm(W^1(k),W^2(k),W^3(k)),$$

$$k=1,2,3,4,5.$$

则

$$W(k)\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial u}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial U}{\partial v}\right)\neq 0,$$

即

$$W^1(k)Z^1(\xi)+W^2(k)Z^2(\xi)+W^3(k)Z^3(\xi)\neq 0,\qquad (34)$$
$$k=1,2,3,4,5.\qquad \forall\,\xi\in C$$

这意味着 $f(M)$ 与以下 5 个平面

$$P_k: W^1(k)Z^1+W^2(k)Z^2+W^3(k)Z^3=0,\quad k=1,\cdots,5$$

不相交。显然 $\{P_1,P_2,\cdots,P_5\}$ 是处于一般位置的。根据引理2.1，$f(M)$ 必落在 CP^2 的一个平面

$$P: aZ^1+bZ^2+cZ^3=0\qquad (35)$$

上。经过一个适当的埃尔米特(Hermite)变换

$$\begin{pmatrix}\dot Z^1\\ \dot Z^2\\ \dot Z^3\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}Z^1\\ Z^2\\ Z^3\end{pmatrix}$$

后，可以假定 P 的方程为 $\dot Z^1=0$。这时映射 $f: M\to CP^2$ 可看作映射 $f: M\to CP^1$。令

$$\dot W(k)=\begin{pmatrix}\dot W^1(k)\\ \dot W^2(k)\\ \dot W^3(k)\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}W^1(k)\\ W^2(k)\\ W^3(k)\end{pmatrix},$$

则 $\{\dot W(k)\,|\,1\leqslant k\leqslant 5\}$ 是处于一般位置的。即

$$\det(\dot W(i),\dot W(j),\dot W(k))\neq 0,$$
$$\forall\,\{i,j,k\}\subset\{1,2,3,4,5\}.\qquad (36)$$

我们有

$$\bar{\dot W}^1(k)\dot Z^1(\xi)+\bar{\dot W}^2(k)\dot Z^2(\xi)+\bar{\dot W}^3(k)\dot Z^3(\xi)$$
$$=W^1(k)Z^1(\xi)+W^2(k)Z^2(\xi)+W^3(k)Z^3(\xi)\neq 0,$$
$$\forall\,\xi\in C,\qquad 1\leqslant k\leqslant 5.$$

式中 $\bar{\dot W}^1(k)$ 表示 $\dot W^1(k)$ 的共轭复数。因为 $\dot Z^1(\xi)=0$，所以

$$\bar{W}^2(k)\dot{Z}^2(\xi)+\bar{W}^3(k)\dot{Z}^3(\xi)\neq 0,$$
$$\forall\ \xi\in C,\qquad 1\leqslant k\leqslant 5.$$

即 $f(M)$ 不取点集

$$\{(-\bar{W}^3(k),\bar{W}^2(k))\mid 1\leqslant k\leqslant 5\}.$$

由(36)可知

$$\operatorname{rank}\{(-\bar{W}^3(i),\bar{W}^2(i)),(-\bar{W}^3(j),\bar{W}^2(j)),(-\bar{W}^3(k),\bar{W}^2(k))\}=2$$
$$\forall\ \{i,j,k\}\subset\{1,2,\cdots,5\}.$$

由引理 2.2 可知，在 $\{(-\bar{W}^3(k),\bar{W}^2(k))\mid 1\leqslant k\leqslant 5\}$ 中至少有 3 个处于一般位置的点。利用 Picard 定理，$f(M)$ 必为一点，即 $U(M)$ 在一个平面上。因此 $x(M)$ 是一个抛物型的仿射球，它必为椭圆抛物面。

2.2 和 2.3 两段取材于[Li-3].

2.4　ΔJ 和 $\Delta(\frac{1}{2}J+\|B\|_c)$的计算及其应用

前面，我们计算过仿射球的 ΔJ，并导出了很好的微分不等式，得到了仿射微分几何中的一些重要结果。对于一般的仿射超曲面，要计算 ΔJ，得到好的微分不等式、不是一件容易的事情。Calabi 使用复变函数论的技巧，对 A^3 中仿射极大曲面计算了 ΔJ 和 $\Delta(\frac{1}{2}J+\|B\|)$，从而导出了很有意义的几何结论。

在二维仿射曲面的研究中，尤其是在仿射极大曲面的研究中，使用复变函数论的语言是有很大优越性的。我们现在阐述这一点。本段主要取材于 Calabi 的文章[Ca-6]。

设 $x:M\to A^3$ 是一个局部严格凸的曲面，选择定向使它的第 Ⅱ 基本形式

$$\mathrm{II}=\sum h_{ij}\omega^i\omega^j \tag{37}$$

是正定的。$x(M)$关于 A^3 中任意的幺模仿射标架的第二基本形式都是共形等价于(37)的。这样，A^3 的仿射结构在 $x(M)$上诱导了一

个自然的定向和一个由(37)的共形等价类表示的共形结构，因此，M 可被自然地考虑为一个黎曼面。下面我们用这个黎曼面的全纯坐标参数来表示仿射微分几何中的 Blaschke 度量、Fubini-Pick 形式、仿射第二基本形式，以及仿射微分几何中的基本方程。

在 M 上选择关于第二基本形式(37)的等温参数 u、v，令 $\xi=u+\sqrt{-1}v$。Blaschke 度量可以表为

$$G = 2F(\xi,\bar{\xi})|d\xi|^2, \tag{38}$$

其中 $d\xi=du+\sqrt{-1}dv$。设 Fubini-Pick 形式和仿射第三基本形式在局部坐标系 u、v 下的分量为 A_{ijk} 和 B_{ij}。令

$$\alpha = \frac{1}{2}(A_{111} + \sqrt{-1}A_{222}), \tag{39}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{B_{11} - B_{22}}{2} - \sqrt{-1}B_{12}\right), \tag{40}$$

则 Fubini-Pick 形式和仿射第三基本形式可分别表为

$$A = \alpha(d\xi)^3 + \bar{\alpha}(d\bar{\xi})^3, \tag{41}$$

$$B = \beta(d\xi)^2 + 2L_1Fd\xi d\bar{\xi} + \bar{\beta}(d\bar{\xi})^2. \tag{42}$$

引入记号

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

由复流形论知，M 上的复张量代数丛可约化为双度(bigraded)的复线丛 $E_{r,s}$ 的直和，其中 r、s 为任意整数。在局部上，$E_{r,s}$ 由 $(d\xi)^r \otimes (d\bar{\xi})^s$ 生成，这里当 r 或 s 为负整数时，分别表示 $(\frac{\partial}{\partial\xi})^{-r}$ 或 $(\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}})^{-s}$。因而度量系数 F 是 $E_{1,1}$ 中的一个截面的纤维坐标。M 的切丛之复化可分成 $E_{-1,0}$ 和 $E_{0,-1}$ 的直和，它们分别由 $\frac{\partial}{\partial\xi}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}$ 生成。

Blaschke 度量的 Levi-Civita 连络的协变微分算子∇可分解成$\nabla=\nabla'+\nabla''$，其中∇'是(1,0)型算子，∇''是(0,1)型算子。这些算子具有以下性质：

1) ∇、∇'、∇''是线性求导算子，即对$E_{r,s}$的任意截面f_1、f_2和$E_{p,q}$的任意截面g，以及任意复数c，有

Ⅰ) $\nabla(cf_1)=c\nabla f_1$；

Ⅱ) $\nabla(f_1+f_2)=\nabla f_1+\nabla f_2$；

Ⅲ) $\nabla(f\otimes g)=(\nabla f)\otimes g+f\otimes\nabla g$。

以上三式对∇'、∇''也成立；

2) 设f是$E_{r,0}$的光滑截面，g是$E_{0,s}$的光滑截面。它们的局部系数用$f(\xi,\bar{\xi})$和$g(\xi,\bar{\xi})$表示。则$\nabla''f$在$E_{r,1}$中和$\nabla'g$在$E_{1,s}$中的局部系数分别为$\dfrac{\partial f(\xi,\bar{\xi})}{\partial\bar{\xi}}$，$\dfrac{\partial g(\xi,\bar{\xi})}{\partial\xi}$；

3) 对函数f，$\nabla'f=\dfrac{\partial f}{\partial\xi}$，$\nabla''f=\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\xi}}$；

4)对度量系数F有

$$\nabla'F=\nabla''F=0.$$

由以上性质，对$E_{r,s}$的任意光滑截面f，有

$$\nabla'f=F^r\frac{\partial}{\partial\xi}(F^{-r}f)=\frac{\partial f}{\partial\xi}-rf\frac{\partial\log F}{\partial\xi},\tag{43}$$

$$\nabla''f=F^s\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}}(F^{-s}f)=\frac{\partial f}{\partial\bar{\xi}}-sf\frac{\partial\log F}{\partial\bar{\xi}}.\tag{44}$$

对$E_{r,s}$的任意光滑截面f的两次协变微商，有以下的 *Ricci* 恒等式：

$$[\nabla',\nabla'']f=\nabla'\nabla''f-\nabla''\nabla'f=(s-r)F\chi f,\tag{45}$$

其中

$$\chi=-F^{-1}\frac{\partial^2\log F}{\partial\xi\partial\bar{\xi}}$$

是 Blaschke 度量的内在高斯曲率。

Blaschke 度量的拉普拉斯算子为

$$\Delta = \frac{2}{F}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\bar{\xi}}.$$

由于 u、v 是关于第二基本形式(37)的等温参数，显然有

$$[x_\xi, x_{\bar{\xi}}, x_{\xi^2}] = [x_\xi, x_{\bar{\xi}}, x_{\bar{\xi}^2}] = 0, \tag{46}$$

$$-\sqrt{-1}[x_\xi, x_{\bar{\xi}}, x_{\xi\bar{\xi}}] = F^2 > 0,$$

其中 $x_\xi = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}, x_{\bar{\xi}} = \dfrac{\partial x}{\partial \bar{\xi}}, x_{\xi^2} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi}$，等等。$x(M)$ 的仿射法矢 Y 和仿射余法矢 U 可分别表示为

$$Y = F^{-1} x_{\xi\bar{\xi}}, \tag{47}$$

$$U = -\sqrt{-1} F^{-1} x_\xi \times x_{\bar{\xi}}, \tag{48}$$

式中"×"表示通常矢量的外积以自然的方式扩充到复矢量。

$\{x_\xi, x_{\bar{\xi}}, Y\}$ 是 $x(M)$ 的一个复标架场，而 $\{U, U_\xi, U_{\bar{\xi}}\}$ 是余法浸入曲面 $U: M \longrightarrow A^{3*}$ 上的一个复标架场。它们满足以下关系：

$$[x_\xi, x_{\bar{\xi}}, Y] = [U, U_\xi, U_{\bar{\xi}}] = \sqrt{-1} F, \tag{49}$$

$$\begin{pmatrix} U \\ U_\xi \\ U_{\bar{\xi}} \end{pmatrix} \cdot (x_\xi, x_{\bar{\xi}}, Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -F & 0 \\ -F & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

式中"·"表示典型配合的复线性扩充。

方程

$$x_{,ij} = \sum A_{ij}^k x_k + G_{ij} Y,$$

$$Y_i = -\sum B_i^k x_k,$$

$$U_{,ij} = -\sum A_{ij}^k U_k - B_{ij} U$$

可以写成

$$\begin{aligned} \nabla'\{x_\xi, x_{\bar{\xi}}, Y\} &= \{F^{-1}\alpha x_{\bar{\xi}},\ FY,\ -L_1 x_\xi - F^{-1}\beta x_{\bar{\xi}}\}, \\ \nabla''\{x_\xi, x_{\bar{\xi}}, Y\} &= \{FY,\ F^{-1}\bar{\alpha} x_\xi,\ -L_1 x_{\bar{\xi}} - F^{-1}\bar{\beta} x_\xi\}, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \nabla'\{U, U_\xi, U_{\bar{\xi}}\} &= \{U_\xi,\ -\beta U - F\alpha^{-1} U_{\bar{\xi}},\ -L_1 F U\}, \\ \nabla''\{U, U_\xi, U_{\bar{\xi}}\} &= \{U_{\bar{\xi}},\ -L_1 F U,\ -\bar{\beta} U - F\bar{\alpha}^{-1} U_\xi\}. \end{aligned} \tag{52}$$

从(51)和(52)可算出 α、β 的以下表达式：

$$\alpha = -\sqrt{-1}[Y, x_\xi, x_{\xi^2}] = \sqrt{-1}[U, U_\xi, U_{\xi^2}], \tag{53}$$

$$\beta = \sqrt{-1}[Y, x_\xi, Y_\xi] = \sqrt{-1}F^{-1}[U_\xi, U_{\bar\xi}, U_{\xi^2}]. \tag{54}$$

显然 $\alpha(d\xi)^3$ 和 $\beta(d\xi)^2$ 都是不变量，即 α 是(3,0)型张量，β 是(2,0)型张量。

第一类和第二类 Codazzi 方程可表为

$$\begin{aligned} \nabla''\alpha &= \frac{\partial\alpha}{\partial\bar\xi} = -F\beta, \\ \nabla'\bar\alpha &= \frac{\partial\bar\alpha}{\partial\xi} = -F\bar\beta, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \nabla''\beta &= \frac{\partial\beta}{\partial\bar\xi} = F\frac{\partial L_1}{\partial\xi} + F^{-1}\alpha\bar\beta, \\ \nabla'\bar\beta &= \frac{\partial\bar\beta}{\partial\xi} = F\frac{\partial L_1}{\partial\bar\xi} + F^{-1}\beta\bar\alpha. \end{aligned} \tag{56}$$

高斯方程可以表示为

$$\chi = F^{-3}\alpha\bar\alpha + L_1. \tag{57}$$

我们现在开始研究仿射极大曲面。这时仿射余法矢 U 的各分量是调和函数，因此存在3个全纯函数 $Z(\xi) = (Z^1(\xi), Z^2(\xi), Z^3(\xi))$，使

$$U = \sqrt{-1}(Z - \bar Z).$$

下面用全纯曲线 $Z: M \to C^3$ 来表示仿射极大曲面的一些参数。由(49)、(53)和(54)可知

$$F = -\sqrt{-1}[U, U_\xi, U_{\bar\xi}] = [Z - \bar Z, Z', \bar Z'] > 0,$$

$$\alpha = \sqrt{-1}[U, U_\xi, U_{\xi^2}] = [Z - \bar Z, Z', Z''], \tag{58}$$

$$\beta = -F^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar\xi} = \frac{[\bar Z', Z', Z'']}{[Z - \bar Z, Z', \bar Z']}. \tag{59}$$

命题2.2 设 $x: M \to A^3$ 是一个局部凸的仿射极大曲面，$\xi = u + \sqrt{-1}v$ 是关于Blaschke度量的等温参数。则向量值的三次微分式

$$\Psi = (\alpha Y + \beta x_\xi)(d\xi)^3 \tag{60}$$

和六次微分形式

$$\Phi = (\beta \nabla' \alpha - \alpha \nabla' \beta)(d\xi)^6 \tag{61}$$

是全纯微分式。

要证明这个命题，需要以下代数引理。

引理 2.3　设 a、b、c、d、e 是 R^3 或 C^3 中的向量，则

$$[a,b,c][d,b,e] - [a,b,e][d,b,c] = [a,b,d][c,b,e].$$

证明

$$\begin{aligned}
&[a,b,c][d,b,e] - [a,b,e][d,b,c] \\
&= \begin{vmatrix} a\cdot d & a\cdot b & a\cdot e \\ b\cdot d & b\cdot b & b\cdot e \\ c\cdot d & c\cdot b & c\cdot e \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a\cdot d & a\cdot b & a\cdot c \\ b\cdot d & b\cdot b & b\cdot c \\ e\cdot d & e\cdot b & e\cdot c \end{vmatrix} \\
&= -(a\cdot b)\begin{vmatrix} b\cdot d & b\cdot e \\ c\cdot d & c\cdot e \end{vmatrix} + (a\cdot e)\begin{vmatrix} b\cdot d & b\cdot b \\ c\cdot d & c\cdot b \end{vmatrix} \\
&\quad + (a\cdot b)\begin{vmatrix} b\cdot d & b\cdot c \\ e\cdot d & e\cdot c \end{vmatrix} - (a\cdot c)\begin{vmatrix} b\cdot d & b\cdot b \\ e\cdot d & e\cdot b \end{vmatrix} \\
&= (a\cdot b)\begin{vmatrix} d\cdot c & d\cdot e \\ b\cdot c & b\cdot e \end{vmatrix} - (a\cdot c)\begin{vmatrix} d\cdot b & d\cdot e \\ b\cdot b & b\cdot e \end{vmatrix} \\
&\quad + (a\cdot e)\begin{vmatrix} d\cdot b & d\cdot c \\ b\cdot b & b\cdot c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a\cdot b & a\cdot c & a\cdot e \\ d\cdot b & d\cdot c & d\cdot e \\ b\cdot b & b\cdot c & b\cdot e \end{vmatrix} = [a,b,d][c,b,e].
\end{aligned}$$

证毕。

命题 2.2 的证明　我们只需证明 Ψ、Φ 有以下表达式：

$$\Psi = -\sqrt{-1}Z' \times Z''(d\xi)^3, \tag{62}$$

$$\Phi = [Z', Z'', Z'''](d\xi)^6. \tag{63}$$

先证(62)。由(49)、(50)、(15)和(16)可得

$$Y=-\sqrt{-1}F^{-1}U_\xi\times U_{\bar\xi},$$

$$x_\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}-\sqrt{-1}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$=\frac{1}{2}\left(U\times\frac{\partial U}{\partial v}+\sqrt{-1}U\times\frac{\partial U}{\partial u}\right)=\sqrt{-1}U\times U_\xi,$$

因此

$$\alpha Y+\beta x_\xi=-\sqrt{-1}\frac{[Z-\bar Z,Z',Z'']}{[Z-\bar Z,Z',\bar Z']}Z'\times\bar Z'$$

$$-\sqrt{-1}\frac{[Z',\bar Z',Z'']}{[Z-\bar Z,Z',\bar Z']}(Z-\bar Z)\times Z'.$$

利用引理 2.3 可得

$$[Z-\bar Z,Z',Z'']Z'\times\bar Z'-[Z',\bar Z',Z''](Z-\bar Z)\times Z'$$

$$=[Z-\bar Z,Z',\bar Z']Z'\times Z''.$$

事实上，只需考虑它们的每一个分量再利用引理 2.3 即得。因此

$$\Psi=-\sqrt{-1}Z'\times Z''(d\xi)^3.$$

现在证明(53)式。

$$\beta\nabla'\alpha-\alpha\nabla'\beta=-\frac{[Z',\bar Z',Z''][Z-\bar Z,Z',Z''']}{[Z-\bar Z,Z',\bar Z']}$$

$$+\frac{[Z-\bar Z,Z',Z''][-\bar Z',Z',Z''']}{[Z-\bar Z,Z',\bar Z']}.$$

利用引理 2.3 得到

$$-[Z',\bar Z',Z''][Z-\bar Z,Z',Z''']+[Z-\bar Z,Z',Z''][Z',\bar Z',Z''']$$

$$=[Z-\bar Z,Z',\bar Z'][Z',Z'',Z'''],$$

因此

$$\Phi=[Z',Z'',Z'''](d\xi)^6.$$

证毕。

Calabi 对仿射极大曲面计算了 $J=\chi=F^{-3}\alpha\bar\alpha$ 的拉普拉斯：

$$\frac{1}{2}\Delta J=F^{-4}\nabla''\nabla'(\alpha\bar\alpha)=F^{-4}\nabla''((\nabla'\alpha)\bar\alpha+\alpha(\overline{\nabla''\alpha})$$

$$= F^{-4}\{(\nabla'\alpha)(\overline{\nabla'\alpha}) + (\nabla'\nabla''\alpha + 3F\chi\alpha)\bar{\alpha} + \nabla''(-\alpha F\bar{\beta})\}$$

$$= \|\nabla'\alpha\|^2 + 3J^2 + F^{-4}[(-\nabla''(F\beta)\bar{\alpha} - F(-F\beta\bar{\beta} + \alpha(\overline{\nabla'\beta})]$$

$$= \|\nabla'\alpha\|^2 + 3J^2 + \|\beta\|^2 - 2F^{-3}Re(\bar{\alpha}\nabla'\beta). \tag{64}$$

记 Φ 的局部系数为 φ，即

$$\varphi = \beta\nabla'\alpha - \alpha\nabla'\beta.$$

当 $\alpha\neq 0$ 时，

$$\bar{\alpha}\nabla'\beta = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\beta\nabla'\alpha - \varphi)$$

$$\|\nabla'\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2F^{-3}\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\beta\nabla'\alpha - \varphi)\right)$$

$$\geqslant \|\nabla'\alpha - \frac{F\alpha\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\|^2 - \|\varphi\|.$$

把上式代入(64)，得到

$$\frac{1}{2}\Delta J \geqslant 3J^2 - \|\varphi\|^2, \tag{65}$$

式中 $\|\alpha\|^2 = F^{-3}\alpha\bar{\alpha}$，$\|\beta\|^2 = F^{-2}\beta\bar{\beta}$。上式对 $\alpha\neq 0$ 的点成立。对任意使 $\alpha=0$ 的一点 P，若存在 P 的一个邻域使 $\alpha\equiv 0$，则在该邻域内 $\beta\equiv 0$，从而 $\varphi\equiv 0$，此时(65)成为恒等式。若 P 的一任一邻域内都存在使 $\alpha\neq 0$ 的点，利用连续性推出(65)成立。

定理 2.6　设 $x: M\to A^3$ 是一个局部严格凸的仿射完备的仿射极大曲面。如果 $Z(\xi)$ 位于 C^3 的半空间内，则 $x(M)$ 是一椭圆抛物面。

证明　不失一般性，我们可以假定 M 是单连通的。由于 $\chi = J + L_1 = J \geqslant 0$ 以及 M 是仿射完备的，根据 Blanc 和 Fiala 定理(参看[Bla-F])，M 必共形等价于 C。由于 $Z(M)$ 落在 C^3 的半空间中，存在 C^3 上的一个非平凡的复线性函数。它与 Z 的复合产生一个全纯函数 $\theta: M\to C$，其值在 C 的半平面内。由刘维尔定理得 $\theta=$常数。

即 $Z(M)$落在一个复平面内。因此

$$\varphi = (Z', Z'', Z''') = 0,$$

从而

$$\frac{1}{2}\Delta J \geqslant 3J^2.$$

这是完备黎曼流形上的一个微分不等式。由第二章 § 3 中的定理 3.4 可知 $J\equiv 0$。因而 $x(M)$是一个椭圆抛物面。证毕。

定理 2.7　设 $x: M\to A^3$ 是一个局部严格凸的仿射完备的仿射极大曲面。如果存在一个正常数 $C<3$,使

$$\|\varphi\| \leqslant CJ^2 \tag{66}$$

则 $x(M)$是一椭圆抛物面。

证明　由(65)和(66)可得

$$\Delta J \geqslant 2(3-C)J^2.$$

由于 $C<3$,以及第二章 § 3 中的定理 3.4 可知,$J=0$。证毕。

利用不等式(65),可以把定理 2.5 加强,得到下面定理(参看[Li—4])

定理 2.8　设 $x: M\to A^3$ 是一个局部严格凸的仿射完备的仿射极大曲面,若它的高斯像 $g(M)$不取 4 个或更多的处于一般位置的点以及它们的对径点,则 $x(M)$是椭圆抛物面。

证明　定义映射

$$f: M \to CP^2$$

$$(u,v) \to (W^1(u,v), W^2(u,v), W^3(u,v)),$$

式中 u、v 是等温参数,(W^1,W^2,W^3)是 CP^2 的齐次坐标,并且

$$W^k(u,v) = \frac{\partial U^k}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial U^k}{\partial v}, \qquad k=1,2,3.$$

f 是从 M 到 CP^2 的全纯映射。若 $g(M)$不取 4 个或更多的处在一般位置的点以及它们的对径点,由定理 2.5 的证明以及 Borel 定理(即引理 2.1),$f(M)$必位于 CP^2 的一个平面 $P: aW^1+bW^2+cW^3=0$ 上。由

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}W,$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3}\right] = \frac{\sqrt{-1}}{8}\left[W, \frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right]$$

和 $f(M)$ 位于平面 P 上可知

$$\varphi = \frac{\sqrt{-1}}{8}\left[W, \frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right] = 0.$$

因此

$$\frac{1}{2}\Delta J \geqslant 3J^2.$$

从而在 M 上，$J=0$，即 $x(M)$ 是一个椭圆抛物物面。证毕。

Calabi 进一步计算了 $\frac{1}{2}\|\alpha\|^2 + \|\beta\|$ 的拉普拉斯。首先

$$\begin{aligned}
\Delta\|\beta\| &= \|\beta^{-1}\| F^{-3}\nabla''\nabla'(\beta\bar\beta) \\
&\quad - \frac{1}{2}\|\beta\|^{-3}F^{-5}(\nabla'(\beta\bar\beta))(\nabla''(\beta\bar\beta)) \\
&= \|\beta\|^{-1}F^{-3}[5F^{-2}\alpha\bar\alpha\beta\bar\beta + 2F^{-1}\mathrm{Re}((\nabla'\alpha)\bar\beta^2) \\
&\quad + (\nabla'\beta)\overline{\nabla'\beta}] - \frac{1}{2}\|\beta\|^{-3}F^{-5}[\beta\bar\beta(\nabla'\beta)\overline{\nabla'\beta} \\
&\quad + F^{-2}\alpha\bar\alpha\beta^2\bar\beta^2 + 2F^{-1}\mathrm{Re}(\alpha(\nabla'\beta)\bar\beta^3)] \\
&= \frac{9}{2}\|\alpha\|^2\|\beta\| + \frac{1}{2}\|\beta\|^{-1}\|\nabla'\beta\|^2 \\
&\quad + 2\|\beta\|^{-1}F^{-4}\mathrm{Re}((\nabla'\alpha)\bar\beta^2) - F^{-6}\|\beta\|^{-3}\mathrm{Re}(\alpha(\nabla'\beta)\bar\beta^3).
\end{aligned} \tag{67}$$

结合(64)与(67)可得

$$\Delta(\frac{1}{2}J + \|\beta\|) = \Delta(\frac{1}{2}\|\alpha\|^2 + \|\beta\|)$$

$$= 3\|\alpha\|^4 + \|\nabla'\alpha + F\beta^{\frac{3}{2}}\bar\beta^{-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{1}{2}\|\beta\|^{-1}\|\nabla'\beta - 2\|\beta\|\alpha$$

$$-F^{-1}\bar\alpha\beta^2\bar\beta^{-1}\|^2 + \|\beta\|^{-2}\|\alpha\bar\beta^{\frac{3}{2}} - \bar\alpha\beta^{\frac{3}{2}}\|^2$$

$$\geqslant 3\|\alpha\|^4 + \|\beta\|^{-2}\|\alpha\overline{\beta}^{\frac{3}{2}} - \overline{\alpha}\beta^{\frac{3}{2}}\|^2. \tag{68}$$

易知 $\|\beta\|^2=\frac{1}{2}\|B\|_G$,由不等式(68)我们得到下面定理。

定理 2.9 设 $x: M\to A^3$ 是局部严格凸的、仿射完备的仿射极大曲面。若存在常数 $C>0$,使在 M 上

$$J+\sqrt{2}\|B\|_G\leqslant C,$$

则 $x(M)$ 是一个椭圆抛物面。

第五章 几何不等式

§1 仿射等周不等式

本节研究经典的等周不等式的仿射类似。我们先交待一下本章所用的几个记号和术语。

设 M 是 A^{n+1} 中的卵形面。在 A^{n+1} 中引入一个与 A^{n+1} 的体积元相一致的内积"·"，即关于内积"·"的标准正交基确定的有向体积为1。记(A^{n+1}, ·)为 E^{n+1}。用 $S(M)$ 表示 M 的关于 Blaschke 度量的体积，用 $S_E(M)$ 表示 M 的按诱导度量决定的体积。M 围成 A^{n+1} 中的一个凸体，这个凸体的 $n+1$ 维体积也是仿射不变的，用 $V(M)$ 表示它。为了区别起见，本章中我们称 $S(M)$、$S_E(M)$ 分别为 M 的仿射"面积"和欧氏"面积"，而称 $V(M)$ 为 M 所围的"体积"。对于 A^3 中的卵形面，Blaschke 利用 Steiner 的对称化方法证明了

$$(S(M))^2 \leqslant 12\pi V(M), \tag{1}$$

当且仅当 M 为椭球时上面等号成立。不等式(1)称为**仿射等周不等式**，Blaschke 的证明方法对一般的 n 也适用，本节将证明一般的 n 维仿射等周不等式。

1.1 Steiner 对称化

设 M 为 E^{n+1} 中的卵形面，P 为任意一超平面，l 是与 P 垂直

的直线。令 M 的所有平行于 l 的弦沿 l 方向作平行移动，使弦的中点落在 P 上。所有被移动后的弦组成一个新的凸体，它的表面是一个卵形面，记为 $\dot{M}$。这种由卵形面 M 造出一个新的卵形面 $\dot{M}$ 的手续称为 Steiner 对称化。下面我们用分析式子来表示 Steiner 对称化。

选笛卡尔坐标系 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$，使超平面 P 的方程为 $x_{n+1}=0$。作平行于 x_{n+1} 轴并且与 M 相切的直线，它们与 P 的交点围成 P 上的一个凸区域 Ω；它们与 M 相切的切点集把 M 分成两个超曲面，分别记为 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$。Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 分别可用定义在 Ω 上的两个凸函数 f 和 $\tilde{f}$ 表示，即

$$\Sigma: \quad x_{n+1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{2}$$

$$\tilde{\Sigma}: \quad x_{n+1} = -\tilde{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{3}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega.$$

f 和 $\tilde{f}$ 的海森矩阵都是正定的。$\dot{M}$ 也被分成两个超曲面 $\dot{\Sigma}$ 和 $\dot{\tilde{\Sigma}}$，它们可以用 f 和 $\tilde{f}$ 表示如下：

$$\dot{\Sigma}: x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f(x_1, \cdots, x_n) + \tilde{f}(x_1, \cdots, x_n)\right), \tag{4}$$

$$\dot{\tilde{\Sigma}}: x_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(f(x_1, \cdots, x_n) + \tilde{f}(x_1, \cdots, x_n)\right). \tag{5}$$

显然，若 M 为 E^{n+1} 中的光滑卵形面，则 $\dot{M}$ 也是光滑卵形面。我们要研究经 Steiner 对称化后，$S(M)$ 和 $V(M)$ 是如何变化的。

定理 1.1 设 M 为 E^{n+1} 中的卵形面，P 为任意一超平面。作 M 关于 P 的 Steiner 对称化得到卵形面 $\dot{M}$。则

$$S(\dot{M}) \geqslant S(M), \tag{6}$$

$$V(\dot{M}) = V(M). \tag{7}$$

不等式(6)中等号成立的条件是，M 的所有垂直于 P 的弦的中点在一个超平面上。

要证明这个定理需要下面的引理。

引理 1.1　设 T、Q 是两个正定的 n 阶对称矩阵，则

$$\left[\det\left(\frac{T+Q}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}} \geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\det(T)\right)^{\frac{1}{n+2}} + \left(\det(Q)\right)^{\frac{1}{n+2}}\right]. \tag{8}$$

(8)中等号成立的条件是 $T=Q$。

证明　因为 T 和 Q 都正定矩阵，因此可以同时对角化，即存在非退化的矩阵 E 使

$$T = E\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}E', \quad Q = E\begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix}E'.$$

因此仅需证明下面的不等式：

$$\left[\left(\frac{\lambda_1+\mu_1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{\lambda_n+\mu_n}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{n+2}} + (\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{\frac{1}{n+2}}\right], \tag{9}$$

其中 λ_1、λ_2、…、λ_n、μ_1、μ_2、…μ_n 都是正数。由 Hölder 不等式有

$$\left[\left(\frac{\lambda_1+\mu_1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{\lambda_n+\mu_n}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left((\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{n}} + (\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

其中等号成立的条件是：

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \cdots = \frac{\lambda_n}{\mu_n}. \tag{11}$$

因此

$$\left[\left(\frac{\lambda_1+\mu_1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_2+\mu_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{\lambda_n+\mu_n}{2}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}$$

$$\geqslant \left[\frac{1}{2}\left((\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{n}} + (\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\frac{n}{n+2}}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left((\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{n+2}}+(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{\frac{1}{n+2}}\right) \tag{12}$$

最后一个不等式利用了 $x^a(a<1)$ 的凸性①。(12)中等号成立的条件是：$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$。因此(8)式成立，并且等号成立的条件是：$\lambda_1=\mu_1,\lambda_2=\mu_2,\cdots,\lambda_n=\mu_n$。证毕。

定理 1.1 的证明 不难算出 Σ 和 $\widetilde{\Sigma}$ 的 Blaschke 度量的体积元分别为

$$\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}} dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

和

$$\left[\det\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}} dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

因此

$$S(M)=\int_\Omega\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}+\left[\det\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]^{\frac{1}{n+2}}\right\}dx_1 \wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

同理

$$S(\dot{M})=2\int_\Omega\left\{\det\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{n+2}}dx_1 \wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

利用引理 1.1 可得

$$S(\dot{M})\geqslant S(M).$$

当 $S(\dot{M})=S(M)$ 时，对 Ω 中任意一点有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i\partial x_j}.$$

从而

---

① 本书所说的凸函数是指它具有正定的海森矩阵，这与通常数学分析中的定义不同，本书中的凸函数对应数学分析中的凹函数。

$$\bar{f} = f - \Sigma a_i x_i - b,$$

其中 a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$)，$b$ 是常数。$x(M)$ 的平行于 x_{n+1} 轴的弦的中点满足

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(f - \bar{f}) = \frac{1}{2}(\Sigma a_i x_i + b)$$

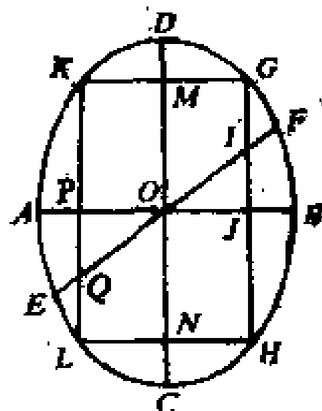
即在一超平面上。

等式(7)是显然的。证毕。

1.2　椭球的一个特征

定理 1.2　设 M 是 A^{n+1} 中的一个卵形面。若 M 沿着任意方向的所有平行弦的中点在一超平面上，则 M 是一个椭球。

证明　我们采用数学归纳法证明。先证当 $n=1$ 时是成立的。考虑 A^2 上的一条封闭凸曲线，它沿每一方向的平行弦的中点在一条直线上。如图，任选一组平行弦，设它的中点组成弦 CD。设 O 是 CD 的中点。这族平行弦中过点 O 的一条为 AB。我们断言，所有平行于 CD 的弦的中点都在 AB 上。事实上，



它们的中点组成的弦必然经过点 O，设该弦为 EF，显然 EF 不与 CD 重合。假设 EF 不与 AB 重合，任作一条平行于 CD 的弦 GH，使它与 EF 和 AB 分别交于 I、J 两点。作平行于 AB 的弦 GK 和 HL，它们与 CD 分别交于 M、N 两点。显然四边形 $GMNH$ 是平行四边形，$GM=HN$。连接 KL，它交 AB 于 P 点。因 CD 是由所有平行于 AB 的弦的中点组成，故有 $GM=MK$，$HN=NL$。因此，$GK=HL$，四边形 $GKLH$ 是平行四边形。从而 $KP=GJ$，$PL=JH$，KL 平行于 CD。由于 EF 是由平行于 CD 的弦的中点组成，以及 KL 平行于 CD，所以 KL 必与 EF 相交，设交点为 Q。于是有 $GI=IH$，$KQ=QL$。因此

$$KP < PL = JH < GJ = KP.$$

我们得到一个矛盾。因此断言成立。经过一个幺模仿射变换，我们可以假定 AB 与 CD 正交。这时闭曲线既关于 AB 对称，又关于 CD 对称，因此必关于 O 中心对称。过 O 任作一弦 l_1，设所有平行于 l_1 的弦的中点组成弦 l_2，由前面所证，所有平行于 l_2 的弦的中点必在 l_1 上，即 l_1 是平行弦中点的轨迹。由第一章 § 2.2 可知，l_1 所在的直线是曲线在对应点的仿射法线。我们把 O 取为原点，则所有仿射法矢与位置矢平行。设 s 为仿射弧长参数，则

$$x'' = \lambda x, \tag{13}$$

其中 x''表示关于仿射弧长的二阶微商。由(13)可知

$$x''' = \lambda' x + \lambda x',$$

因为 $x''' // x'$，因此 $\lambda' = 0$，即 $\lambda =$ 常数。从而曲线的仿射曲率为常数。由第一章 § 2.1 的计算以及曲线的封闭性，它必为椭球。

假定定理 1.2 对 $n=k$ 成立。考虑 A^{k+2} 中的卵形面 M，它满足定理 1.2 中的条件。任意超平面 P 若与 M 相交，必交成 P 内的一个 k 维卵形面。不难看出，它也满足定理 1.2 的条件。由归纳假设，它是一个 k 维椭球。因此 M 与任意超平面的交(如果它们相交的话)为一个 k 维椭球。从而 M 是一个 $k+1$ 维椭球。证毕。

1.3 仿射等周不等式

现在证明本节的主要结果"仿射等周不等式"。

定理 1.3 对于 A^{n+1} 中的任意卵形面 M 有

$$(\dot{S}(M))^{n+2} \leqslant (n+1)^{n+2} \sigma_{n+1}^2 (V(M))^n, \tag{14}$$

式中

$$\sigma_{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\right)^{-1}$$

表示 $n+1$ 维欧氏空间中的单位球所界的体积。当且仅当 M 为椭球面时，(14)中的等号成立。

证明　首先证明，E^{n+1} 中任一卵形面 M 有

$$(S(M))^{n+2}\leqslant (n+1)\sigma_{n+1}(S_E(M))^{n+1}. \tag{15}$$

设 M 的高斯曲率为 $K>0$，则 M 的 Blaschke 度量的体积元为

$$dS = K^{\frac{1}{n+2}}dS_E,$$

其中 dS_E 为 M 的诱导度量的体积元。由经典的不等式有

$$\left(\frac{\int_M K^{\frac{1}{n+2}}dS_E}{\int_M dS_E}\right)^{n+2} \leqslant \frac{\int_M K dS_E}{\int_M dS_E} = \frac{O_n}{\int_M dS_E},$$

式中 O_n 是 E^{n+1} 中单位球的面积，$O_n=(n+1)\sigma_{n+1}$。因此(15)式成立。

我们作一个其所界体积为 $V(M)$ 的标准球 σ，σ 的欧氏面积为

$$S_E(\sigma) = (n+1)\sigma_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}V(M)^{\frac{n}{n+1}}.$$

根据 W. Gross 的收敛定理（参看[Blas-2]的 § 115），对任意 $\varepsilon>0$，从 M 出发，经过适当的、充分多的 Steiner 对称化，可以造出一个新的卵形面 $\dot{M}$，使

$$S_E(\dot{M}) < S_E(\sigma) + \varepsilon.$$

由定理 1.1 以及(15)式，我们有

$$S(M) \leqslant S(\dot{M}) \leqslant [(n+1)\sigma_{n+1}(S_E(\dot{M}))^{n+1}]^{\frac{1}{n+2}}$$

$$\leqslant [(n+1)\sigma_{n+1}(S_E(\sigma)+\varepsilon)^{n+1}]^{\frac{1}{n+2}}.$$

由于 ε 是任意，因此有

$$(S(M))^{n+2} \leqslant (n+1)\sigma_{n+1}(S_E(\sigma))^{n+1}$$

$$=(n+1)^{n+2}\sigma_{n+1}^2(V(M))^n.$$

所以(14)对任意卵形面成立。当

$$(S(M))^{n+2} = (n+1)^{n+2}\sigma_{n+1}^2(V(M))^n$$

时，M 的与任意方向平行的弦之中点都在一超平面上。因若不然，必存在一超平面 P，M 关于 P 的 Steiner 对称化后得到卵形面 $\dot{M}$，

将有

$$S(\dot{M}) > S(M),$$
$$V(\dot{M}) = V(M).$$

因此对 $\dot{M}$ 来说，

$$(S(\dot{M}))^{n+2} > (n+1)^{n+2}\omega_{n+1}^2(V(\dot{M}))^n$$

与(14)矛盾，由定理 1.2，M 必为椭球。证毕。

§2 关于各阶仿射平均曲率的不等式

设 M 是 A^3 中的卵形面。由公式

$$\chi = J + L_1$$

立即得到

$$\int_M L_1 dS \leqslant \int_M \chi dS = 4\pi, \tag{1}$$

当 $L_2>0$ 在 M 上处处成立时，由第三章 §1 中的定理 1.3 知，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$。从而

$$L_1 \geqslant \sqrt{L_2}.$$

因此有

$$\int_M \sqrt{L_2}dS \leqslant \int_M L_1 dS \leqslant 4\pi. \tag{2}$$

$\int_M \sqrt{L_2}dS$ 实际上是 M 的仿射法矢像的中心仿射度量的体积。本节的目的是把公式(1)、(2)推广到高维。

2.1 混合体积

为了以后的应用，我们简单介绍一下多个凸体的混合体积的概念，以及关于混合体积的 ALexandrov-Fenchel 不等式。详细的叙述，请参看[Bu-Z]、[Blas-3]等著作，

设 N_1、N_2 是 A^n 中的任意两个凸集，λ 是一个实数。定义

$$N_1 + N_2 = \{a + b \mid a \in N_1, b \in N_2\},$$

$$\lambda N_1 = \{\lambda a \mid a \in N_1\}.$$

定理 2.1 (Minkowski)　设 N_1、N_2、…、N_s 是 s 个凸体，λ_1、λ_2、…、λ_s 是 s 个非负实数。则 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i N_i$ 的体积 $V(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i N_i)$ 可以表示为 λ_1、λ_2、…、λ_s 的以下多项式：

$$V(\sum_{i=1}^{S}\lambda_i N_i) = \sum V(N_{i_1},\cdots,N_{i_n})\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}, \tag{3}$$

其中系数 $V(N_{i_1},N_{i_2},\cdots,N_{i_n})$ 关于 N_{i_1}、N_{i_2}、…、N_{i_n} 是对称的。

定理 2.1 中展开式的系数 $V(N_{i_1},N_{i_2},\cdots,N_{i_n})$ 称为 $N_{i_1},N_{i_2},\cdots,N_{i_n}$ 的混合体积。显然 $V(N_1,N_1,\cdots,N_1)$ 就等于 N_1 的体积，即 $V(N_1,N_1,\cdots,N_1)=V(N_1)$。

我们可以把(3)式改写成

$$V(\sum_{i=1}^{S}\lambda_i N_i)$$

$$= \sum_{\substack{P_1+\cdots+P_r=n\\ 1\le i_1<\cdots<i_r\le n}} \frac{n!}{P_1!P_2!\cdots P_r!}V(N_{i_1},P_1;\cdots;N_{i_r},P_r)\lambda_{i_1}^{P_1}\cdots\lambda_{i_r}^{P_r}, \tag{4}$$

其中求和是对 n 的所有可能的分解：$n=P_1+\cdots+P_r$，进行的，P_1、P_2、…、P_r 是自然数；而

$$V(N_{i_1},P_1;\cdots;N_{i_r},P_r)$$

$$= V(\underbrace{N_{i_1},\cdots,N_{i_1}}_{p_1\text{个}},\cdots,\underbrace{N_{i_r},\cdots,N_{i_r}}_{p_r\text{个}}). \tag{5}$$

下面介绍混合体积的一些简单性质：

1)　与次序无关。

$$V(N_1,N_2,\cdots,N_n) = V(N_{i_1},N_{i_2},\cdots,N_{i_n}), \tag{6}$$

其中 i_1、i_2…、i_n 是 1、2、…、n 的任意一个排列。

2)　非负系数的多重线性性质。

设 $a_0\geqslant 0, a_1\geqslant 0$. 则

$$V(a_0N_0+a_1N_1,N_2,\cdots,N_n)$$
$$=a_0V(N_0,N_2,\cdots,N_n)+a_1V(N_1,N_2,\cdots,N_n). \tag{7}$$

3)　平移不变性。

设 $a_i\in A^n, 1\leqslant i\leqslant n$,则

$$V(N_1+a_1,N_2+a_2,\cdots,N_n+a_n)$$
$$=V(N_1,N_2,\cdots,N_n).$$

4)　幺模仿射不变性。

设 T 是 A^n 中任一幺模仿射变换,则

$$V(TN_1,TN_2,\cdots,TN_n)=V(N_1,N_2,\cdots,N_n). \tag{9}$$

5)　单调性。

设 N_i、$\dot{N}_i$ 是 A^n 中的凸集,满足

$$N_i\subset\dot{N}_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

则

$$V(N_1,N_2,\cdots,N_n)\leqslant V(\dot{N}_1,\dot{N}_2,\cdots,\dot{N}_n). \tag{10}$$

作为5)的推论,混合体积是非负的。

在几何上常常考虑这样的混合体积 $V(N_1,N_2,\cdots,V_n)$,其中 N_1、N_2、$\cdots$、N_n 中只有两个不同的凸体。

关于混合体积的不等式,最著名的要数下面的 Alexandrov-Fenchel 不等式。

定理 2.2(Alexandrov-Fenchel)

$$[V(N_1,N_2,\cdots,N_n)]^2$$
$$\geqslant V(N_1,N_1,N_3,\cdots,N_n)V(N_2,N_2,N_3,\cdots,N_n). \tag{11}$$

我们写出(11)的两个直接推论:

$$[V(N_1,N_2,\cdots,N_n)]^n\geqslant V(N_1)V(N_2)\cdots V(N_n), \tag{12}$$

$$[V(N,k;L,l)]^2\geqslant V(N,k-1;L,l+1)V(N,k+1;L,l-1). \tag{13}$$

2.2　$\int_M L_{\frac{1}{2}}dS$ 的上界

设 M 是 A^{n+1} 中的卵形面，我们设法把仿射平均曲率 L_r 在 M 上的积分与某两个凸体的混合体积联系起来。引入以下的微分形式：

$$\Phi_k=\frac{1}{(n+1)!}[\underbrace{-dY,\cdots,-dY}_{k\text{个}},\underbrace{dx,\cdots,dx}_{n-k\text{个}},-x] \tag{14}$$

$$\Psi_k=\frac{1}{(n+1)!}[\underbrace{-dY,\cdots,-dY}_{k\text{个}},dx,\cdots,dx,Y] \tag{15}$$

$$0\leqslant k\leqslant n,$$

其中 x 是 M 的位置矢量，Y 是 M 的仿射法矢。

设 M 的仿射第三基本形式 (B_{ij}) 正定，这等价于 $L_n>0$ 在 M 上处处成立（第三章§1的定理1.3）。由于 M 是卵形面，容易知道 $-Y(M)$ 是卵形面。令 $x_0:=x, x_1:=-Y$。考虑下面的卵形面族：

$$x_t=x_0+tx_1: M\to A^{n+1}, t\geqslant 0.$$

$M_t:=x_t(M)$ 所界的体积为

$$V(M_t)=\int_M\frac{1}{(n+1)!}[dx_t,dx_t,\cdots,dx_t,-x_t]$$

$$=\int_M\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(t\Psi_k+\Phi_k). \tag{16}$$

设 $C(M_t)$ 表示 M_t 所界的凸体。由于 $Y_i=-\Sigma B_i^jx_j$，M 和 $-Y(M)$ 在对应点有相同的欧氏单位外法向量。由凸体的理论，我们有

$$C(M_t)=C(M)+tC(-Y(M)).$$

因此 $V(M_t)$ 可以用混合体积表示如下：

$$V(M_t)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}t^kV_k, \tag{17}$$

式中

$$V_k=V(\underbrace{M,\cdots,M}_{n+1-k\text{个}},\underbrace{-Y(M),\cdots,-Y(M)}_{k\text{个}}). \tag{18}$$

比较(16)和(17)有

$$\binom{n+1}{k}V_k=\int_M\left[\binom{n}{k-1}\Psi_{k-1}+\binom{n}{k}\Phi_k\right], \tag{19}$$

$$1\leqslant k\leqslant n,$$

$$V_0=\int_M\Phi_0.$$

由于

$$\frac{1}{(n+1)!}d[\underbrace{-dY,\cdots,-dY}_{k\text{个}},dx,\cdots,dx,x,Y]$$

$$=\Psi_k-\Phi_{k+1},$$

因此

$$\int_M\Phi_k=\int_M\Psi_{k-1}. \tag{20}$$

我们得到

$$V_k=\int_M\Psi_{k-1}. \tag{21}$$

另一方面，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\Psi_k=\frac{1}{(n+1)!}[d(x-tY),\cdots,d(x-tY),Y]$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_k\binom{n}{k}L_kt^kdS,$$

因此

$$V_{k+1}=\int_M\Psi_k=\frac{1}{n+1}\int_M L_kdS. \tag{22}$$

特别，

$$V_1=\frac{1}{n+1}S(M), \tag{23}$$

$$V_0=V(M). \tag{24}$$

上一节的等周不等式可以写成

$$V_1^{n+2}\leqslant\sigma_{n+1}^2V^n.\tag{25}$$

由不等式(13)可得

$$V_k^2\geqslant V_{k-1}\cdot V_{k+1}.\tag{26}$$

把 $\log V_k$，$0\leqslant k\leqslant n+1$，看作 k 的函数，(26)式表明离散点$(k,\log V_k)$，$0\leqslant k\leqslant n+1$，构成的图是凹的，而不等式(25)表明点$\left(\frac{n+2}{2},\log\sigma_{n+1}\right)$不位于连接点$(0,\log V_0)$和点$(1,\log V_1)$的弦之下，由函数的凹性，对任意两个满足 $0\leqslant k<k'\leqslant n+1$，$k\leqslant\frac{n+2}{2}$的整数 k、k'，连接$(k,\log V_k)$和$(k',\log V_{k'})$两点的弦一定在$(\frac{n+2}{2},\log\sigma_{n+1})$之下，因此

$$V_{k'}^{n+2-2k}V_k^{2k'-n-2}\leqslant\sigma_{n+1}^{2(k'-k)}.\tag{27}$$

特别当 n 为偶数时，有

$$V_{\frac{n+2}{2}}\leqslant\sigma_{n+1}.\tag{28}$$

当(27)、(28)中等号成立时，有

$$V_1^{n+2}=\sigma_{n+1}^2V_0^n.$$

从而 M 是椭球。从(22)我们得到下面定理。

定理 2.3　设 M 是 A^{n+1} 中的卵形面，若 $L_n>0$ 在 M 上处处成立。则对满足 $0\leqslant k<k'\leqslant n+1$，$k<\frac{n+2}{2}$的任意整数 k、k'，有

$$\left(\int_M L_{k'-1}dS\right)^{n+2-2k}\left(\int_M L_{k-1}dS\right)^{2k'-n-2}\leqslant O_n^{2(k'-k)}.\tag{29}$$

特别，当 n 为偶数时

$$\int_M L_{\frac{n}{2}}dS\leqslant O_n,\tag{30}$$

式中

$$O_n=2\pi^{\frac{n+1}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^{-1}.$$

当且仅当 M 为椭球时，(29)和(30)中的等号成立。

2.3 仿射法矢像的体积的上界

现在我们把公式(2)推广到高维。当(B_{ij})严格正定时，$Y(M)$也是一个卵形面，取中心仿射法矢为$-Y$，则$Y(M)$的中心仿射度量为(B_{ij})。在M上选取局部幺模仿射标架场$\{x;e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$，使$e_1,\cdots,e_n\in T_xM$，$G_{ij}=\delta_{ij}$，$e_{n+1}=Y$，则$Y(M)$按中心仿射度量诱导的体积为

$$\int_M\sqrt{\det(B_{ij})}dS=\int_M\sqrt{L_n}dS.$$

因为

$$\left(\frac{\int_M\sqrt{L_n}dS}{\int_M dS}\right)^2\leqslant\frac{\int_M L_n dS}{\int_M dS},$$

我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_M\sqrt{L_n}\right)^2&\leqslant\int_M dS\cdot\int_M L_n dS\\&=(n+1)^2V_1V_{n+1}\\&=(n+1)^2V_0^{-n}V_1^{n+2}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{V_{j-1}V_{j+1}}{V_j^2}\right]^{n+1-j}\\&\leqslant(n+1)^2V_0^{-n}V_1^{n+2}\\&\leqslant(n+1)^2\sigma_{n+1}^2=O_n^2,\end{aligned}$$

即

$$\int_M\sqrt{L_n}dS\leqslant O_n.$$

当$\int_M\sqrt{L_n}dS=O_n$时，有

$$V_1^{n+2}=V_0^n\sigma_{n+2}^2.$$

因此 M 必为椭球。于是我们已经证明了下面定理。

定理 2.4　设 M 是 A^{n+1} 中的卵形面，若 $L_n>0$ 在 M 上处处成立，则 M 的仿射法矢像 $Y(M)$ 按中心仿射度量的体积 $\int_M \sqrt{L_n}dS$ 满足

$$\int_M \sqrt{L_n}dS \leqslant O_n.$$

当且仅当 M 为椭球时，上面等号成立。

本节中的定理 2.3、定理 2.4 本质上来源于 *Calabi* 的文章[*Ca*-4]。所不同的是，他考虑的是一个中心仿射法化的卵形面 M，然后作一卵形面 $\dot{M}$，使 $\dot{M}$ 的仿射法矢像恰为 M，其中要用到 Minkowski 问题的存在性和正则性。

参考文献

[Blan-F] C. Blanc and F. Fiala; Le type d' une surface et sa courbure totale, comm. Math. Helv. 14(1941—1942), 230—233.

[Blas-1] W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I Berlin, J springer.

[Blas-2] ——; Vorlesungen über Differtialgeometrie, II Berlin, J springer, 1923.

[Blas-3] ——; 圆与球, (苏步青译) 上海科学技术出版社出版. 1986.

[Bu-Z] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller: Geommetric Inequalities, Springer—Verlag.

[Ca-1] E. Calabi; An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian Geometry, Duke Math. J 25(1958), 45—56.

[Ca-2] ——; Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jögens, Mich. Math. J. 5(1958), 105—126.

[Ca-3] ——; Complete affine hypersurfaces I, Symposia Math. 10(1972), 19—38.

[Ca-4] ——; Hypersurfaces with maximal affinely variant area, Amer. J. Math. 104, 91—126.

[Ca-5] ——; Hypersurface geometry in a vector space, preprint, 67S., O. J.

[Ca-6] ——; Convex affine maximal surfaces, Result in Math. 13(1988) 209—223.

[Cha] I. Chavel: Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic press, INC. 1984.

[Chen-Y-1] S. Y. Cheng and S. T. Yau: On the regularity of the Monge—Ampère equation $\det\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_j}\right) = F(x, u)$, Commun. Pure and Appl. Math. 30 (1977) 41—68.

[Chen-Y-2] — —: Complete affine hypersurfaces, Part I. the completeness of affine metrics, Commun. Pure and Appl. Math. 39(1986) 839—866.

[Cher-1] S. S. Chern: Affine minimal hypersurfaces, Proc. Jap— U. S, Semin. Tokyo 1977, 17—30(1978)

[Cher-2] ——: The mathematical works of W. Blaschke, Abh. Math. Sem. Hamburg 39 1—9(1973).

[Cher-3] ——: Integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space and their applications to uniqueness theorem, J, of Math. and Mach. 8 (1959) No. 6

[Cher-C] 陈省身、陈维桓：微分几何讲义，北京大学出版社出版，1983.

[Cher—T] S. S. Chern and C.-L. Terng: An analogue of Baecklund's theorem in affine geometry, Rocky Mt. J. Math. 10(1980), 105—124.

[Ei] L. P. Eisenhart: Riemannian Geometry, Princeton Univ. press, 1949.

[Fa] 方德植：微分几何基础，科学出版社出版，1984.

[Fl] H. Elanders: Local theory of affine hypersurface, J Analyse Math, 15 (1965), 353—387.

[Gi-1] S. Gigena: On a conjecture of E. Calabi, Geo. Dedicata II (1981), 387—396.

[Gi-2] ——: Integral invariants of convex cones. J. of Diff. Geometry, 13 (1978), 191—222.

[Ha-L-p] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya: 不等式，(越民义译)科学出版社出版，1965.

[Ho] E. Hopf: 整体微分几何，(吴大任译)科学出版社出版，1987.

[Hs-S] C. C. Hsiung and J. K. Shahin: Affine differential geometry of closed hypersurfaces, Proc. London Math. Soc. 17(1967), 715—735.

[Hu, etal] H. Huck, R. Roitzsch, U. Simon, W. Vortisch, R. Walden, B. Wegner, W.

Wendlund; Beweismethodender der differentialgeometrie im Großen. Lecture Notes in Math . 335.Springer Berlin, 1973.

[Kob —N] S. Kobayshi and K. Nomizu; Foundations of differential geometry, Vol. II, Interscience publishers, 1969.

[Koz-S] M. Kozlowski and U. Simon; Hyperflächen mit äquiaffiner Einsteinmetrik, Mathematica Festschrift E. mohr, TU Berlin, 179—190, 1985.

[Li-1] Li An—Min(李安民); Uniqueness theorems in affine differenbtial geometry, Part I, Results in Math. 13(1988), 281 - 307.

[Li-2] —— ; Variational formulas for higher affine mean curvature, Results in Math. 13(1988), 318—326.

[Li-3] —— ; Affine maximal surfaces and harmonic functions, Lec. Notes in Math. 1369, 142—151,

[Li-4] ——; Some theorems in Affine Differential Geometry, (将在 Acta. Mathematica Sinica, New Series 上发表)

[Li-5] ——; Affine completeness and Euclidean completeness, (待发表).

[Li-6] ——E. Calabi conjecture on hyperbolic affine sphere, (简报发表在四川大学学报, Vol. 25, No. 4(1988), 全文将在 Math. Z 上发表).

[Li-P] Li An—Min(李安民)and G. Penn; Uniqueness theorems in affine differential geometry , Part II Results in Math . 13(1988)308—317.

[Mü-1] H.-F. Münzner; Die poincarésche indexmethode und ihre anwendungen in der affinen flächddtheorie im Großen, Dissertation FU Berlin, 1923.

[Mü-2] —— ; Maximumprinzipähnliche sätze der Euklidischen und der affinen flächentheorie, Arch, Math. 17(1966), 569—576.

[No-1] K. Nomizu; What is affine differential geometry? Differential Geometry Meeting, Univ. Münster 1982, Tagungsbericht 42—43(1982).

[No-2] —— ; On completeness in affine differential geometry, Geo. Dedicata 20 (1986).

[Ol-S] V. Oliker and U. Simon; The christoffel problem in relative differential geometry, Manuskript TU Berlin—Emory Univ. Atlanta 1984.

[Po-1] A. V. Pogorelov; On the improper convex affine hypersurface, Geo. Dedicata 1(1972), 33—46.

[Po-2] ——: The Minkowski multidimensional problem. John Wney &. sons, 1978.

[Pr-W] M. H. 普劳特 H. F. 温伯格:微分方程中的最大值原理,(叶其孝、刘西垣译)科学出版社出版,1985.

[Sa] T. Sasaki: Hyperbolic affine hyperspheres, Nagoya Math. J. 77(1980), 107—123.

[Schn-1] R. Schneider: Zur affinen differentialgieomdtrie im großen I, Math. Z. 101(1967), 375—406.

[Schn-2] ——: Zur affinen differentialgeometrie im großen II, Über eine abschätzung der Pickschen invariante auf affinsphären, Math. Z. 102 (1967), 1—8.

[Schw] A. Shwenk: Eigenwertprobleme des Laplace—operators und anwendungen auf untermannigfaltigkeiter, Dissertation TU Berlin 1984.

[Schw—S] A. Schwenk and U. Simon: Hypersurfaces with constant epuiaffine mean curvature, Arch. Math, 46(1986), 85—90.

[Si-1] U. Simon: Integralformeln zur kennzeichnung von Hyperflächen durch Krümmungen und stützabstand, Dissertation FU Berlin 1965.

[Si-2] ——: Minkowskische integralformeln und ihre anwendungen inder differentialgeometrie im großen. Math. Amalen 173(1967), 307—321.

[Si-3] ——: Kennzerchnungen von sphären, Math. Annalen. 175(1985), 81—88.

[Si-4] ——: Zur Relativgeometrie: Symmetrische zusammenhänge auf hyperflächen, Math. Z. 106(1968), 36—46.

[Si-5] ——: The Pick *invariant in equiaffine differential* geometry, Abh. Math. Sem. Hambung 53(1983). 225—228.

[Si-6] ——: Hypersurfaces in affine differential geometry and eigenvalue problems, Proc. conf. Diff. Geo. Appl. Nové Město na Morave (CSSR) 1983 Part I, 127 - 136(1984).

[Si-7] ——: Hypersurfaces in equiaffine differential geomtry, Geom, Dedicata 17(1984), 157—168.

[Si-8] ——: A course on afine differential geometry, Lecture notes Nankai Insti-

tute of Math, Tianjin, 1987.

[SP] M. Spivak; A comprehensive *introduction to differential geometry*, Vol. 3, Boston, Mass, Publishor Perish (1975).

[SU] 苏步青:仿射微分几何,科学出版社出版,1982.

[Su-X] 苏步青、忻元龙:高维仿射空间参数曲线的内在不变量,应用数学学报,3(1980),139—146.

[Te] C.-L. Terng; Affine maximal surfaces, Seminar on minimal submanifolds, Annals of Math. Studies, 103; Princeton Uni. Press, 1983.

[Ve-1] I. N. Vekua(И; Н. Векуа):一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用,高等教育出版社出版,1956.

[Ve-2] ——; Generalized analytic functions, Internation Series of Monographs on pure and Applied Math. Vol. 25, Pergamon press, 1962.

[We] ; W. L. Wendland; Elliptic systems in the plane, Pitman, 1979.

[Ya-S] 丘成桐、孙理察(R. Schoen):微分几何,科学出版社出版,1988.

[Yu] Yu Jianhui(余建辉); Affine spheres with constant sectionl curvature in A^4, (待发表).

基本记号

A　Fubini-Pick 形式；

A_{ijk}、A_{ij}^{*}　Fubini-Pick 形式关于某标架场的分量；

A^n　n 维实仿射空间；

A^{n*}　A^n 的对偶空间；

B　仿射第三基本形式；

B_{ij}　仿射第三基本形式关于某标架场的分量；

$\mathbf{C}$　复数域；

$\mathbf{C}^n$　n 维复线性空间；

$\mathbf{CP}^n$　n 维复射影空间；

det(C)　矩阵 C 的行列式；

G　Berward-Blaschke 度量；

G_{ij}　Berward-Blaschke 度量关于某标架场的分量；

h_{ij}　第二基本形式的系数；

H　t =det(h_{ij})；

J　Pick 不变量；

L_r　第 r 阶仿射平均曲率；

R　标量曲率；

R_{ij}　李奇曲率；

R_{ijkl}　黎曼曲率；

$\mathbf{R}$　实数域；

R^n n 元实数组$(x^1,\cdots,x^n)$所构成的向量空间；

U 仿射余法矢；

χ 法化标量曲率；

Y 仿射法矢；

T_xM M 在 x 点的切空间；

Δ 拉普拉斯算子；

∇ 梯度算子.